

NOTAS DE CLASE :

**Introducción a la Estadística  
con Apoyo Computacional**

Felipe Osorio y Ronny Vallejos

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA



## Índice general

Capítulo 1. Nociones de Probabilidad	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Fundamentos de Probabilidad	20
Capítulo 2. Estadística Descriptiva	33
2.1. Estadísticas de Resumen	33
2.2. Covarianza y correlación	55
2.3. Estadísticas descriptivas multivariadas	59
2.4. Regresión lineal simple	63
2.5. Resúmenes gráficos	68
Bibliografía	75



## Nociones de Probabilidad

El objetivo de este capítulo es presentar algunos elementos básicos de teoría de probabilidades y que permitirá el desarrollo de los capítulos posteriores. El material es introductorio y mayores detalles pueden ser hallados, por ejemplo, en los libros de [Casella y Berger \(2002\)](#), [Chung \(1974\)](#) y [Hoel et al. \(1971\)](#). Iniciaremos la presentación de este capítulo recordando algunas definiciones de sumas y productorios, así como teoría de conjuntos y elementos de análisis combinatorio, también conocido como técnicas de conteo. Esta instancia ofrece una oportunidad para incorporar ejemplos utilizando el ambiente para cálculo estadístico R ([R Core Team, 2023](#)) y posteriormente se presenta la definición axiomática de probabilidad de Kolmogorov así como los conceptos de probabilidad condicional e independencia. Ambos conceptos claves para el análisis de datos.

### 1.1. Preliminares

**1.1.1. Sumas y Productos.** En esta sección se introduce notación que tiene por objetivo escribir de forma compacta sumas y productos de secuencias de números  $a_1, a_2, \dots$ , donde  $a_i \in \mathbb{R}$ , para todo  $i$ .

DEFINICIÓN 1.1. Considere una secuencia de números  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Se define la *sumatoria* de esta secuencia, como:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad (1.1)$$

donde  $i$  denota el índice de la sumatoria, mientras que  $a_i$  representa un elemento genérico. En este caso,  $n$  indica la cantidad de elementos que se están sumando.

Es posible apreciar que la suma en (1.1) puede ser escrita de manera análoga como

$$\sum_{1 \leq i \leq n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n. \quad (1.2)$$

Debemos enfatizar que, si  $n = 0$  el valor de la sumatoria se define como cero.

A partir de la Ecuación (1.2) podemos introducir una notación mucho más general. En efecto, sea  $R$  un conjunto de índices. Así, basta considerar el conjunto  $R = \{1, 2, \dots, n\}$ , para re-escribir la suma en (1.2) como:

$$\sum_{i \in R} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n. \quad (1.3)$$

Aunque frecuentemente la notación dada en la Ecuación (1.3) es utilizada para sumas finitas, esta puede ser adaptada con facilidad para sumas infinitas. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i \geq 1} a_i = a_1 + a_2 + \dots$$

Más formalmente, debemos escribir

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i.$$

RESULTADO 1.2. *Sea  $a$  un número real. De este modo,*

$$\sum_{i=1}^n a = a + a + \dots + a = na.$$

*En general, para  $r < n$  tenemos*

$$\sum_{i=r}^n a = (n - r + 1)a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

RESULTADO 1.3. *Considere la secuencia  $x_1, \dots, x_n$  y sea  $a$  una constante. Entonces,*

$$\sum_{i=1}^n a x_i = a x_1 + \dots + a x_n = a(x_1 + \dots + x_n) = a \sum_{i=1}^n x_i.$$

*En general, sean  $x_1, \dots, x_n$  y  $y_1, \dots, y_n$  dos secuencias de números y  $a, b \in \mathbb{R}$ . Entonces,*

$$\sum_{i=1}^n (a x_i + b y_i) = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n y_i.$$

Note también que las sumatorias pueden ser *descompuestas* en varias sumas. En efecto, para una secuencia de números  $a_1, \dots, a_n$ . Tenemos que

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=k+1}^n a_i, \quad k < n.$$

Es posible construir secuencias de números en R mediante diversos comandos, a continuación usaremos como ejemplo `seq`. Considere,

```
# construye secuencias usando 'seq'
> x <- seq(from = 1, to = 15)
> x
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
> y <- 1:15 # un atajo para 'seq'
> y
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
> z <- seq(from = -3, to = 3, by = 1)
> z
[1] -3 -2 -1 0 1 2 3

# sumando los elementos de 'x' y sus cuadrados
> sum(x)
[1] 120
> sum(x^2)
[1] 1240
```

```
# sumando los elementos de 'z' y sus cuadrados
> sum(z)
[1] 0
> sum(z^2)
[1] 28
```

También podemos crear conjuntos de observaciones con el comando de concatenación. Además, podemos extraer muestras y generar dígitos aleatorios en el intervalo (0,1) con los comandos `sample` y `runif`, respectivamente

```
# construye un vector de datos
> x <- c(5,5,20,35,7,-2)
> sum(x)
[1] 70

# extrae una muestra desde el conjunto {1,2,...,100}
> set.seed(42)
> z <- sample(1:100, size = 7)
> z
[1] 92 93 29 81 62 50 70
# ordenando 'z'
> sort(z)
[1] 29 50 62 70 81 92 93
> order(z)
[1] 3 6 5 7 4 1 2
> z[order(z)] # otra manera de ordenar 'z'
[1] 29 50 62 70 81 92 93

# sumando los elementos de 'z'
> sum(z)
[1] 477
> sum(z[1:5]) # sólo los primeros 5 elementos
[1] 357

# genera 'n' dígitos aleatorios en (0,1)
> n <- 1000
> set.seed(53)
> u <- runif(n)
> u
[1] 0.579189 0.116819 0.090851 0.611993 0.739817 0.657339 0.066094
[8] 0.334605 0.212267 0.212267 0.656931 0.877812 0.041845 0.617601
...
[997] 0.915119 0.398568 0.589021 0.948304

# suma y promedio
> sum(u)
[1] 505.0618
> sum(u) / n
[1] 0.505062
```

EJEMPLO 1.4 (Propiedad telescópica). Suponga  $a_0, a_1, \dots, a_n$  una secuencia de números reales, y considere

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) \\ &= -a_0 + (a_1 - a_1) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-1}) + a_n \\ &= a_n - a_0. \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.5 (Suma de los primeros  $n$  enteros). Considere la siguiente suma,

$$S(n) := \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1.4)$$

Evidentemente, esta fórmula es válida para  $n = 1$ . En efecto,  $S(1) = 1$ . Supondremos que (1.4) es verdadera para los primeros  $n$  enteros. De este modo,

$$\begin{aligned} S(n+1) &= 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}, \end{aligned}$$

lo que verifica la fórmula.

EJEMPLO 1.6 (Suma de cuadrados de los primeros  $n$  enteros). Para evaluar la suma,

$$C(n) := \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2,$$

consideraremos la identidad,

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

De este modo, obtenemos

$$3C(n) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n (k+1)^3 - \sum_{k=1}^n k^3 - 3 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1.$$

Sabemos que,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n 1 = n,$$

y haciendo  $j = k + 1$ , tenemos que

$$3C(n) = \sum_{j=2}^{n+1} j^3 - \sum_{k=1}^n k^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - n.$$

Ahora, es fácil notar que

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n+1} j^3 &= 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3. \end{aligned}$$



Es decir,

$$\begin{aligned} 3C(n) &= (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{n(2n^2 + 3n^2 + 1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}. \end{aligned}$$

De ahí que,

$$C(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

EJEMPLO 1.7 (Suma de una progresión geométrica). Asuma que  $x \neq 1$  y  $n \geq 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} a + ax + \cdots + ax^n &= \sum_{j=0}^n ax^j \\ &= a + \sum_{j=1}^n ax^j = a + (ax + \cdots + ax^n) = a + x(a + \cdots + ax^{n-1}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$= a + x \sum_{j=1}^n ax^{j-1} = a + x \sum_{j=0}^{n-1} ax^j \quad (1.6)$$

$$= a + x \sum_{j=0}^n ax^j - ax^{n+1}. \quad (1.7)$$

Tomando la primera y última relaciones, sigue que

$$\sum_{j=0}^n ax^j = a + x \sum_{j=0}^n ax^j - ax^{n+1},$$

es decir,

$$(1-x) \sum_{j=0}^n ax^j = a - ax^{n+1}.$$

De este modo, obtenemos finalmente

$$\sum_{j=0}^n ax^j = a \left( \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right). \quad (1.8)$$

Adicionalmente, para  $|x| < 1$ ,

$$\sum_{j=0}^{\infty} ax^j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n ax^j = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left( \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right),$$

y como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$  para  $|x| < 1$ , sigue que

$$\sum_{j=0}^{\infty} ax^j = \frac{a}{1-x}.$$

En este ejemplo se han utilizado diversos elementos que permiten notar algunas de las propiedades de las sumatorias. En efecto, en Ecuación (1.5) se utilizó una muy particular versión del Resultado 1.3. Mientras que en (1.6) y (1.7) se realizó un cambio en el índice de la suma y reorganizó los términos (es decir el dominio sobre el que opera la suma) para obtener el resultado deseado.

EJEMPLO 1.8. Considere la secuencia  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ , y note que el término  $i$ -ésimo de la secuencia es dado por  $\frac{1}{2^i}$  para  $i = 1, 2, \dots$ . Sea  $p = 1/2$  y suponga que deseamos calcular la suma,

$$\sum_{j=1}^{10} p^j = p + p^2 + p^3 + \dots + p^{10}. \quad (1.9)$$

En R podemos considerar

```
# construye la secuencia de interés
> p <- 1/2
> n <- 1:10
> z <- p^n
> z # imprime los 1ros 10 términos de la secuencia
[1] 0.5000 0.2500 0.1250 0.0625 0.0313 0.0156 0.0078 0.0039 0.0020
[10] 0.0010

# despliega la Figura 1
> barplot(height = z, names.arg = as.character(1:10))
```

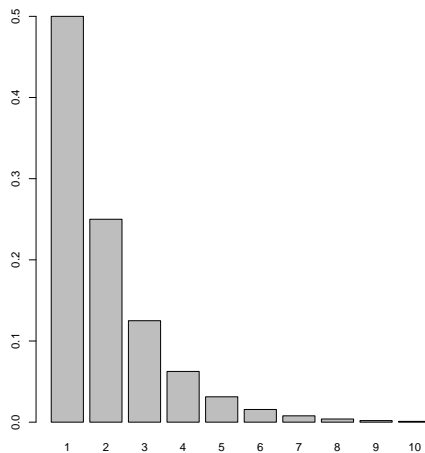


Figura 1. Secuencia geométrica  $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$ .

En efecto, usando (1.8) es fácil notar,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{10} p^j &= p + p^2 + p^3 + \dots + p^{10} = p(1 + p + p^2 + \dots + p^9) \\ &= p \left( \frac{1 - p^{10}}{1 - p} \right) = \left( \frac{p}{1 - p} \right) (1 - p^{10}). \end{aligned}$$

Para  $p = 1/2$ , sigue que

$$\sum_{j=1}^{10} p^j = 1 - p^{10}.$$

Para calcular (1.9), en R hacemos:

```
# Cálculo de la suma en Eq.(1.9)
> sum(z)
[1] 0.9990234

# o alternativamente,
> 1 - p^10
[1] 0.9990234
```

Las siguientes son igualdades que **no satisface** la suma:

- Sean  $a_1, \dots, a_n$  y  $b_1, \dots, b_n$  dos secuencias de números reales. Entonces

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \neq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right). \quad (1.10)$$

En efecto, basta notar que la cantidad de términos involucrados en cada uno de los lados de la ecuación anterior es diferente.

- Un caso particular del anterior es

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \neq \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

- En general, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función no lineal. Entonces

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \neq f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right).$$

En ocasiones disponemos de secuencias de números indexados mediante dos (o más) índices, es decir  $\{a_{ij}\}$ . Por ejemplo, consideremos  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (es decir  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ ) y suponga que deseamos sumar todos los elementos de la matriz  $\mathbf{A}$ . Es decir,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = a_{11} + \dots + a_{1n} + a_{21} + \dots + a_{m1} + \dots + a_{mn}.$$

Notamos fácilmente que podemos intercambiar el orden de las sumas. En efecto,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$$

OBSERVACIÓN 1.9. Debemos enfatizar que la operación de intercambiar el orden de las sumas **no** siempre es válida para series infinitas.

Contrariamente al resultado de la Ecuación (1.10), es válido considerar

$$\left( \sum_{i=1}^m a_i \right) \left( \sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j, \quad (1.11)$$

asimismo

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{j=1}^n x_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j.$$

Para comprender mejor la Ecuación (1.11) considere un caso especial

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^2 a_i\right) \left(\sum_{j=1}^3 b_j\right) &= (a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + b_3) \\ &= (a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3) + (a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 a_i b_j\right). \end{aligned}$$

Existe una notación análoga para productos. En efecto, considere la siguiente definición

DEFINICIÓN 1.10. Sea  $a_1, a_2, \dots, a_n$  una secuencia de números. Se define la *productoria* de esta secuencia, como:

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \cdots a_n. \quad (1.12)$$

En general, podemos escribir

$$\prod_{i \in R} a_i,$$

donde  $R$  representa un conjunto de índices. Note que si no existe algún entero  $i \in R$ , el producto se define con el valor uno.

Adicionalmente, podemos tener el producto de los términos  $a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, n$ , denotada por

$$\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^k a_{ij}.$$

Es fácil mostrar que

$$\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^k a_{ij} = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^n a_{ij}$$

y

$$\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^j a_{ij} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i}^n a_{ij}$$

EJEMPLO 1.11. Para evaluar el producto,

$$\prod_{j=0}^n a^j = a^0 a^1 a^2 \cdots a^n = a^{1+2+\cdots+n} = a^{\sum_{j=1}^n j}.$$

Recordando que  $\sum_{j=1}^n j = n(n+1)/2$ , obtenemos

$$\prod_{j=0}^n a^j = a^{n(n+1)/2}.$$

EJEMPLO 1.12. Suponga la secuencia  $\{1, 2, \dots, n\}$  y que estamos interesados en calcular su producto, esto es,

$$\prod_{j=1}^n j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Considere el siguiente fragmento de código en R:

```
# Calcula el producto entre 1,2,3,4,5 y 6
> n <- 6
> z <- 1:n
> z
[1] 1 2 3 4 5 6
> prod(z)
[1] 720
```

Hablaremos más sobre este producto más adelante en este capítulo. Suponga ahora que deseamos calcular,

$$\log \left( \prod_{i=1}^n z_i \right) = \sum_{i=1}^n \log z_i,$$

donde  $z = (1, 2, \dots, n)$ . Así, podemos hacer:

```
> log(prod(z))
[1] 6.579251

# aplicando 'log' a cada elemento de 'z'
> log(z)
[1] 0.000000 0.693147 1.098612 1.386294 1.609438 1.79176
> sum(log(z)) # evidentemente
[1] 6.579251
```

**1.1.2. Elementos de teoría de conjuntos.** Un conjunto es una colección bastante general de objetos o números, que en este contexto serán llamados elementos. Indicaremos a un conjunto por letras mayúsculas. Decimos que  $a$  es un elemento del conjunto  $A$ , o bien, que  $a$  pertenece a  $A$  y escribimos  $a \in A$ , en caso contrario escribimos  $a \notin A$ . Para los objetos contenidos en  $A$  usaremos la notación

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$

es decir es necesario listar o conocer los elementos de  $A$ , mientras que

$$A = \{a : a \text{ tiene la propiedad } P\},$$

donde  $P$  es una característica que define los elementos de  $A$ .

EJEMPLO 1.13. Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \{1, 2, \dots, n\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, \quad C = \{x : 0 < x < 1\}.$$

También existe conjuntos bastante comunes, tales como:

$\mathbb{R}$  es el conjunto de todos los números reales,

$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$  es un intervalo cerrado en  $\mathbb{R}$ ,

$(a, b) = \{x : a < x < b\}$  es un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$ ,

$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$  es un intervalo semi-cerrado en  $\mathbb{R}$ .

Conjuntos pueden ser de naturaleza muy diversa, en el siguiente ejemplo se considera una colección de funciones.

EJEMPLO 1.14. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y considere

$$A = \{f : f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}\},$$

denota el conjunto de todas las rectas en el plano.

Un conjunto también puede representar una colección de conjuntos. Sea  $A$  y  $B$  dos conjuntos, entonces  $\mathcal{C} = \{A, B\}$  es un conjunto de conjuntos.

EJEMPLO 1.15. Sea  $A = \{0, 1\}$  y  $B = \{1, 2, \dots, n\}$ . Entonces,

$$\mathcal{C} = \{A, B\} = \{\{0, 1\}, \{1, 2, \dots, n\}\},$$

es decir  $\mathcal{C}$  contiene dos elementos. El conjunto  $\{0, 1\}$  y el conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Note que  $\{\{0, 1\}, \{1, 2, \dots, n\}\} \neq \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . El primero es un conjunto con 2 elementos, mientras el último es un conjunto con  $n + 1$  elementos.

Dos conjuntos son de particular interés, el *conjunto universal*, es decir aquél conjunto que contiene todos los objetos bajo consideración, y que será denotado por  $\Omega$ , mientras que el *conjunto vacío* o *nulo*, denotado por  $\emptyset$  corresponde al conjunto que no contiene elementos.

EJEMPLO 1.16. Considere  $\Omega = \mathbb{R}$  el conjunto de números reales y sea,

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 2 = 0\}.$$

De este modo,  $A = \emptyset$ , pues la ecuación cuadrática  $x^2 - 2x + 2 = 0$  no tiene raíces reales.

Un conjunto  $B$  es llamado *subconjunto* de  $A$  si y sólo si para todo  $x \in B$ , entonces  $x \in A$ , en cuyo caso anotamos  $B \subseteq A$ . Si  $B \subseteq A$  y existe  $x \in A$  tal que  $x \notin B$ , entonces se dice que  $B$  es un *subconjunto propio* de  $A$  y anotamos  $B \subset A$ . Cuando  $B \subseteq A$  y  $A \subseteq B$  entonces los conjuntos  $A$  y  $B$  consisten de los mismos elementos, y en este caso  $A = B$ .

EJEMPLO 1.17. Suponga que  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $B = \{1, 3, 5\}$ , en este caso  $B \subset A$ . Mientras que si  $A = \{0, 1\}$  y  $B = \{0, 1\}$ , entonces  $A = B$ . Por otro lado, considere  $A = \{x : x \geq 0\}$  y  $B = \{x : x > 1\}$ , luego  $B \subset A$ .

Evidentemente, tenemos que  $\emptyset \subseteq A$  para todo  $A$ , mientras que  $A \subseteq \Omega$ . Más aún  $\emptyset \subset \Omega$  y  $\Omega \subseteq \Omega$ . Además,  $\Omega$  es un concepto relativo. Por ejemplo, podríamos definir  $\Omega = [0, 1]$  y considerar todos los subintervalos en  $[0, 1]$ .

Un par de elementos  $a$  y  $b$  (no necesariamente diferentes) donde  $a$  es el primer elemento mientras que  $b$  es el segundo es llamado *par ordenado* y escribimos  $(a, b)$ . En general una  $n$ -upla ordenada es  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  y es usual llamar a  $a_i$  la  $i$ -ésima coordenada de la  $n$ -upla.

El *producto cartesiano* de los conjuntos  $A$  y  $B$  denotado por  $A \times B$  es definido como

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Esta definición puede ser extendida a  $n$  conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  como

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

En particular, si  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ , entonces el producto cartesiano es denotado por  $A^n$ . Por ejemplo  $\mathbb{R}^2$  es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales.

La *unión* de dos conjuntos  $A$  y  $B$  consiste de todos los elementos en  $A$  o en  $B$ , es decir

$$A \cup B = \{x : x \in A, \text{ o } x \in B\}.$$

Esta definición se extiende a  $n$  conjuntos  $A_1, \dots, A_n$  como

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \in \Omega : x \in A_k \text{ para al menos un } k \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

y más generalmente para una familia de conjuntos  $\{A_i, i \in I\}$ , con  $I$  un conjunto de índices,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ para al menos un subíndice } i \in I\}.$$

Evidentemente esta última expresión puede ser usada para una secuencia infinita de conjuntos  $A_1, A_2, \dots$ , es decir  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , la cual debe satisfacer

$$x \in A_1 \text{ o } x \in A_2 \text{ o } \dots \iff x \text{ está en al menos uno de } A_1, A_2, \dots$$

EJEMPLO 1.18. Sea  $A = \{1, 2\}$  y  $B = \{1, 5\}$ , entonces  $A \cup B = \{1, 2, 5\}$ . Ahora, si  $A = (0, 1]$  y  $B = (\frac{1}{2}, \infty)$ , entonces  $A \cup B = (0, \infty)$ .

La *intersección* de dos conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto que incluye los elementos comunes a ambos conjuntos y es denotado por  $A \cap B$ , esto es

$$A \cap B = \{x : x \in A, \text{ y } x \in B\}.$$

Esta definición se extiende a  $n$  conjuntos  $A_1, \dots, A_n$  como

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \in \Omega : x \in A_k \text{ para todos los subíndices } k \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

y más generalmente para una familia de conjuntos  $\{A_i, i \in I\}$ , como:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ para todos los subíndices } i \in I\}.$$

Para una secuencia infinita de conjuntos  $A_1, A_2, \dots$ , la intersección  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  debe satisfacer

$$x \in A_1 \text{ y } x \in A_2 \text{ y } \dots \iff x \text{ pertenece a todo } A_1, A_2, \dots$$

EJEMPLO 1.19. Para  $A = \{1, 2\}$  y  $B = \{1, 5\}$ , entonces  $A \cap B = \{1\}$ . Mientras que, si  $A = (0, 1]$  y  $B = (\frac{1}{2}, \infty)$ , entonces  $A \cap B = (\frac{1}{2}, 1]$ .

El *complemento* (con respecto al conjunto universal  $\Omega$ ) de un conjunto  $A$  es definido como:

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

EJEMPLO 1.20. Suponga  $\Omega = [0, 1]$  y  $A = [0, \frac{1}{2})$ , luego  $A^c = [\frac{1}{2}, 1]$ . Por otro lado, sea  $\Omega = \mathbb{R}$  y  $A = \mathbb{R}$ , entonces  $A^c = \emptyset$ .

Además, es fácil notar que

$$(A^c)^c = A, \quad \Omega^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = \Omega.$$

La *diferencia* del conjunto  $B$  con el conjunto  $A$  es definida como el conjunto de los elementos de  $A$  que no pertenecen a  $B$ , esto es,

$$A - B = \{x \in \Omega : x \in A, x \notin B\}.$$

Podemos apreciar que,

$$A - B = A \cap B^c, \quad A^c = \Omega - A.$$

PROPIEDAD 1.21. Sean  $A, B$  y  $C$  conjuntos definidos en  $\Omega$ . Tenemos que,

(a) *Asociatividad de la unión e intersección:*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(b) *Distributividad de la intersección con respecto a la unión y de la unión con respecto a la intersección*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(c) *Conmutatividad de la unión e intersección*

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

(d) *El conjunto vacío  $\emptyset$  es el elemento neutro para la unión*

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A.$$

(e) *El conjunto universal  $\Omega$  es el elemento neutro para la intersección*

$$A \cap \Omega = \Omega \cap A = A.$$

(f) *El complemento satisface*

$$A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = \Omega.$$

(g)  $A \cup A = A$ ,  $A \cap A = A$ ,  $A \cup \Omega = \Omega$ ,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .

(h) *Leyes de De Morgan*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Las fórmulas de De Morgan pueden ser extendidas para  $n$  conjuntos  $A_1, \dots, A_n$ , como:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c,$$

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c,$$

y para una familia de conjuntos  $\{A_i, i \in I\}$ , como:

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \quad \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

Dos conjuntos  $A$  y  $B$  se dicen *disjuntos* si ellos no tienen elementos en común, y escribimos  $A \cap B = \emptyset$ . Más generalmente, los conjuntos  $A_1, \dots, A_n$  se dicen *disjuntos por pares* (o mutuamente excluyentes) si

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

con  $\{i, j\}$  desde el conjunto de índices  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

EJEMPLO 1.22. Sea  $A = \{x : x > 1\}$  y  $B = \{x : x < 0\}$ . Entonces  $A$  y  $B$  son disjuntos.

EJEMPLO 1.23. Sea  $A$  y  $B$  dos conjuntos en  $\Omega$ . Entonces,

$$(A - B) \cap (B - A) = (A \cap B^c) \cap (B \cap A^c) = (A \cap A^c) \cap (B \cap B^c) = \emptyset,$$

es decir  $A - B$  y  $B - A$  son disjuntos.



Una colección de conjuntos  $\{A_1, \dots, A_n\}$  es una *partición* del conjunto  $A$ , si satisface las condiciones:

- (a)  $\{A_1, \dots, A_n\}$  son disjuntos por pares.
- (b)  $\cup_{i=1}^n A_i = A$ .

Suponga que  $\{A_1, \dots, A_n\}$  es una partición de  $A$ , y suponga  $B \subseteq A$ . Entonces  $\{B \cap A_1, \dots, B \cap A_n\}$  es una partición de  $B \cap A$ . En efecto,

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = \emptyset, \quad \forall i \neq j,$$

y

$$\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i) = B \cap \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = B \cap A.$$

EJEMPLO 1.24. La familia de conjuntos  $A_i = [i, i + 1)$ , para  $i = 0, 1, 2, \dots$  forman una partición de  $[0, \infty)$ .

EJEMPLO 1.25.  $A$  y  $A^c$  son una partición de  $\Omega$ , pues

$$A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = \Omega.$$

**1.1.3. Técnicas de conteo.** El análisis combinatorio es el estudio sistemático del conteo de todas las posibles agrupaciones desde un conjunto de objetos. Esta tarea es equivalente contar los elementos de un conjunto finito. A continuación presentaremos ideas preliminares para posteriormente introducir diversas técnicas de conteo.

Los conjuntos  $A$  y  $B$  se dicen *equivalentes* y anotamos  $A \sim B$  si y solo si existe una función biyectiva de  $A$  a  $B$ .

EJEMPLO 1.26. El conjunto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  es equivalente al conjunto  $B = \{1, 2, \dots, n\}$  con  $f(a_k) = k$  para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ , es una función biyectiva desde  $A$  a  $B$ .

Un conjunto  $A$  es llamado *finito*, con  $n$  elementos si y solo si es equivalente al conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Asumiremos que  $\emptyset$  es finito con cero elementos. Un conjunto que no es finito se dice *infinito*, mientras que un conjunto  $A$  se denomina *infinito numerable* si y solo si es equivalente al conjunto de números naturales  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ . Un conjunto  $A$  es llamado *numerable* (o contable) si es finito o infinito numerable, en caso contrario se dice *no numerable*.

El número de elementos de un conjunto finito  $A$ , denotado por  $\mathbf{N}(A)$ , es llamado *cardinal* de  $A$ . En caso que  $\Omega$  sea un conjunto finito, su cardinalidad será denotada como  $\mathbf{N}(\Omega) = N$ .

Los principios fundamentales del conteo corresponden al *Principio de multiplicación* y el *Principio de adición*. En lo que sigue consideraremos conjuntos finitos. A partir de las definiciones anteriores podemos destacar el siguiente lema.

LEMA 1.27. *Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos y equivalentes, entonces*

$$\mathbf{N}(A) = \mathbf{N}(B).$$

De este modo, el cardinal de un conjunto finito  $A$  puede ser determinado desde un conjunto finito  $B$ , equivalente a  $A$ , cuya cardinalidad sea conocida. A continuación, revisamos algunas propiedades básicas del cardinal, que se pueden reestablecer como los principios del conteo.

RESULTADO 1.28. *Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos, entonces*

$$N(A \times B) = N(A) N(B).$$

La cardinalidad del producto Cartesiano de más que dos conjuntos finitos se deduce desde el resultado anterior, en efecto considere el resultado siguiente.

COROLARIO 1.29. *Si  $A_1, A_2, \dots, A_k$  son conjuntos finitos, entonces*

$$N(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = N(A_1) N(A_2) \dots N(A_k).$$

Estos resultados son conocidos frecuentemente como el principio de multiplicación, el cual se puede exponer como sigue:

RESULTADO 1.30 (Principio de Multiplicación). *Suponga que el conjunto  $A_1$  contiene  $n_1$  elementos, el conjunto  $A_2$  contiene  $n_2$  elementos, ..., y el conjunto  $A_k$  contiene  $n_k$  elementos. Entonces el número de maneras de escoger un objeto desde cada uno de los  $k$  conjuntos es:*

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k.$$

EJEMPLO 1.31. En cierto medioambiente, existe 14 especies de mosca de la fruta, 17 especies de polillas y 13 especies de mosquitos. Se desea determinar el número de formas en que se puede escoger una especie de cada tipo. En efecto, tenemos  $n_1 = 14$ ,  $n_2 = 17$  y  $n_3 = 13$ . De este modo, por el principio de multiplicación sigue que existe  $14 \cdot 17 \cdot 13 = 3094$  maneras diferentes de seleccionar una especie de cada tipo.

Ahora, considere el siguiente resultado,

RESULTADO 1.32. *Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos y disjuntos, entonces*

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

Basado en el resultado anterior, se puede mostrar que para  $A$  y  $B$  subconjuntos de un conjunto universal  $\Omega$ , entonces:

$$N(A^c) = N - N(A),$$

con  $N = N(\Omega)$ , mientras que

$$N(A - B) = N(A) - N(A \cap B),$$

y particularmente para  $B \subseteq A$ ,

$$N(A - B) = N(A) - N(B).$$

El siguiente resultado se conoce como principio de adición y corresponde a una extensión del Resultado 1.32.

COROLARIO 1.33. *Si  $A_1, A_2, \dots, A_k$  son conjuntos finitos y mutuamente excluyentes, entonces*

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = N(A_1) + N(A_2) + \dots + N(A_k).$$

Esto permite establecer el siguiente principio.

RESULTADO 1.34 (Principio de Adición). *Si un elemento  $\omega_i$  puede ser seleccionado en  $n_i$  maneras diferentes para  $i = 1, 2, \dots, k$  y la selección de  $\omega_i$  excluye la selección simultánea de  $\omega_j$ , para  $i, j = 1, 2, \dots, k, i \neq j$ . Entonces cualquiera de los elementos  $\omega_1$  o  $\omega_2$  o  $\dots$  o  $\omega_k$ , puede ser seleccionado en*

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k,$$

*maneras.*

EJEMPLO 1.35. Considere el siguiente experimento: *Lanzar un dado o una moneda.* De este modo, los resultados posibles del experimento son  $6 + 2 = 8$ .

En análisis combinatorio debemos distinguir entre conjuntos *ordenados* y *desordenados*. En un conjunto ordenado, el orden es relevante, mientras que no lo será para un conjunto desordenado. Para ilustrar, considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.36. Sea  $A = \{1, 2, 3\}$ , el listado de todos los subconjuntos ordenados de tamaño 2, corresponde a

$$(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2),$$

mientras que la lista de todos los subconjuntos desordenados de tamaño 2 consiste en:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}.$$

Note que en este caso el conjunto  $\{2, 1\}$  es idéntico al conjunto  $\{1, 2\}$ , de modo que no se incluye en el listado.

DEFINICIÓN 1.37. Sea  $A$  un conjunto finito con  $n$  elementos. Una  $k$ -upla ordenada  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  con  $a_r \in A, r = 1, 2, \dots, k$ , es llamada una  $k$ -permutación del conjunto  $A$ , o bien una  $k$ -permutación de  $n$ .

EJEMPLO 1.38. Para el conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$  de 3 elementos tenemos que las 2-permutaciones son las siguientes:

$$(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2).$$

Note que, cualquier permutación  $(a_i, a_j)$  del conjunto  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  puede ser construída como sigue:

- Seleccionamos el primer elemento  $a_i$  desde el conjunto  $A$  con 3 elementos,
- y
- Seleccionamos el segundo elemento  $a_j$ , el cual debe ser diferente de  $a_i$ , desde el conjunto  $B = A - \{a_i\}$  de 2 elementos.

De este modo, usando el principio de multiplicación, el número de 2-permutaciones de 3 es  $3 \cdot 2 = 6$ . En efecto,  $6 = \mathbf{N}(C)$ , donde

$$C = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}.$$

DEFINICIÓN 1.39. El número de  $k$ -permutaciones de  $n$ , denotadas por  $P_{n,k}$  o bien  $(n)_k$ , es dada por

$$P_{n,k} := (n)_k = n(n-1) \cdots (n-k+1).$$

EJEMPLO 1.40. Suponga que se desea calcular cuantas “palabras” de cuatro letras pueden ser formadas (no necesariamente en español) a partir de la palabra “válido”. Note que lo que se desea es obtener el número de todas las 4-permutaciones de 6, es decir:

$$P_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

Para el caso particular en que  $k = n$ , tenemos que el número de permutaciones de  $n$ , es dada por

$$P_{n,n} = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

DEFINICIÓN 1.41. El producto de todos los enteros desde 1 a  $n$ , es llamado  $n$  factorial y se denota como  $n!$ , es decir

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n = \prod_{j=1}^n j.$$

EJEMPLO 1.42. ¿De cuantas formas diferentes podemos ubicar 5 personas en 5 asientos?

$$(5)_5 = 5! = 120.$$

Note que podemos escribir el número  $P_{n,k} = (n)_k$  como:

$$\begin{aligned} P_{n,k} &= n(n-1) \cdots (n-(k-1)) \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-(k-1))(n-k)(n-(k+1)) \cdots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-(k+1)) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}, \end{aligned}$$

para  $k = 1, 2, \dots, n$ , y  $n = 1, 2, \dots$ . Asumiremos que  $0! = 1$ , lo que permite escribir

$$\begin{aligned} P_{n,0} &= (n)_0 = 1, \quad n = 0, 1, \dots, \\ P_{0,0} &= 1, \end{aligned}$$

y además,

$$P_{n,n-1} = P_{n,n} = n!,$$

mientras que, para  $k > n$ ,  $P_{n,k} = (n)_k = 0$ . Es fácil notar que el factorial  $n!$  crece rápidamente conforme  $n$  crece. Por ejemplo,

$$2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 5040, \dots$$

Una aproximación útil es dada a continuación.

OBSERVACIÓN 1.43 (Fórmula de Stirling). Si  $n$  es un entero positivo,

$$n! \approx e^{-n} n^{n+1/2} \sqrt{2\pi}.$$

En efecto, es posible mostrar que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^{-n} n^{n+1/2}} = \sqrt{2\pi}.$$

RESULTADO 1.44. El número  $n!$  de permutaciones de  $n$ , satisface la relación de recurrencia:

$$n! = n(n-1)!, \quad n = 1, 2, \dots,$$

con condición inicial  $0! = 1$ .

EJEMPLO 1.45. En R se dispone de las funciones `factorial` y `lfactorial` para el cálculo del factorial y su logaritmo, respectivamente. Adicionalmente, podemos llevar a cabo el cálculo de  $P_{n,k}$  mediante la función `prod`, por ejemplo:

```
# 4-permutaciones de 6
> prod(6:3)
[1] 360
```

```
# cálculo usando factoriales
> factorial(6) / factorial(6 - 4)
[1] 360
```

Por ejemplo, podemos escribir una función en R para evaluar la formula de Stirling, como:

```
# fórmula de Stirling
> stirling <- function(n) {
+   val <- sqrt(2 * pi) * exp(-n) * n^(n + .5)
+   exact <- factorial(n)
+   rel <- abs(val - exact) / exact
+   attr(val, "error") <- rel
+   val
+ }

# aproximación de 5!
> stirling(5)
[1] 118.0192
attr(,"rel")
[1] 0.016507
```

En algunos casos, no todos los objetos que se desea permutar pueden ser distinguibles. Por ejemplo, existe  $3! = 6$  permutaciones de las 3 letras ABB, a saber:

ABB, ABB, BAB, BBA, BAB, BBA.

Sin embargo, las dos B's *no son distinguibles*. En efecto, las únicas permutaciones distinguibles son ABB, BAB y BBA. De este modo, los distintos ordenamientos son

$$\frac{3!}{2!1!} = \frac{6}{2} = 3,$$

pues disponemos un total de 3 letras, dos de ellas B y una A.

Para generalizar el concepto anterior, suponga un conjunto de  $n$  elementos particionado en  $r$  subconjuntos conteniendo  $k_1, k_2, \dots, k_r$  elementos con  $n = k_1 + k_2 + \dots + k_r$ . El número de permutaciones de  $n$  objetos que incluye  $k_1, k_2, \dots, k_r$  objetos indistinguibles, es dado en el siguiente resultado.

RESULTADO 1.46. *El número de permutaciones de  $n$  tipos de elementos con  $k_1, k_2, \dots, k_r$  elementos, respectivamente, es dado por*

$$M_{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}, \quad n = k_1 + k_2 + \dots + k_r.$$

OBSERVACIÓN 1.47. Es frecuente escribir  $M_{k_1, k_2, \dots, k_r}$  usando el *coeficiente multinomial*,

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}.$$

EJEMPLO 1.48. Calcular el número de permutaciones distintas con las cifras  $\{4, 7, 3, 4, 7, 7, 3\}$ . De este modo,

$$\binom{7}{2, 2, 3} = \frac{7!}{2!2!3!} = \frac{5040}{2 \cdot 2 \cdot 6} = 210.$$

Para motivar ideas considere el siguiente ejemplo,

EJEMPLO 1.49. Suponga que se lanza 3 veces una moneda y registramos si el resulta es cara ( $C$ ) o sello ( $S$ ). De este modo, obtenemos:

$$(C, C, C), (C, C, S), (C, S, C), (S, C, C), (C, S, S), (S, C, S), (S, S, C), (S, S, S).$$

Es decir, tenemos  $2^3 = 8$  permutaciones con repetición.

El siguiente resultado presenta el número de permutaciones con repeticiones.

RESULTADO 1.50. *El número de  $k$ -permutaciones de  $n$  con repetición, denotada como  $U_{n,k}$  es dada por:*

$$U_{n,k} = n^k.$$

EJEMPLO 1.51. Suponga el conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$  y considere todas las 2-permutaciones de  $A$  con repetición

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3).$$

Es decir, el total del 2-permutaciones de 3 cuando las repeticiones son permitidas es dada por

$$U_{3,2} = 3^2 = 9.$$

EJEMPLO 1.52. Considere un grupo de  $k$  personas. ¿Cuántas listas posibles se pueden realizar con los días de sus cumpleaños? En efecto, tenemos

$$\underbrace{365 \cdot 365 \cdots 365}_{k \text{ veces}} = 365^k.$$

DEFINICIÓN 1.53. Sea  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un conjunto finito de  $n$  elementos. Una colección (desordenada) de  $k$  elementos  $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  con  $a_r \in A$ ,  $r = 1, 2, \dots, k$  es llamada una  $k$ -combinación del conjunto  $A$ , o bien una  $k$ -combinación de  $n$ .

EJEMPLO 1.54. Considere el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , las 2-combinaciones de  $A$  son las siguientes:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}.$$

En efecto,  $\{1, 2\}$  y  $\{2, 1\}$  corresponden al mismo conjunto y sólo difieren en el orden. Mientras que, las 3-combinaciones de  $A$  corresponden a

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}.$$

En R la función `combn` permite listar todas las combinaciones posibles tomadas desde un conjunto con  $n$  elementos. Para el conjunto  $A$ , podemos listar las 2-combinaciones y 3-combinaciones, como

```
# conjunto de índices
> a <- 1:4
> a
[1] 1 2 3 4

# 2-combinaciones de 4
> combn(a, m = 2)
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    1    1    1    2    2    3
[2,]    2    3    4    3    4    4
```

```
# 3-combinaciones de 4
> combn(a, m = 3)
      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    1    1    2
[2,]    2    2    3    3
[3,]    3    4    4    4
```

RESULTADO 1.55. El número de  $k$ -combinaciones de  $n$ , denotada por  $C_{n,k}$  o bien  $\binom{n}{k}$  es dada por

$$C_{n,k} := \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

EJEMPLO 1.56. Un comité está conformado por 12 miembros y el quorum mínimo para su funcionamiento es de 8 miembros. Deseamos saber en cuantas maneras podemos constituir el comité de manera tal que tengamos el quorum mínimo. De ahí que, existe

$$\binom{12}{8} = \frac{12!}{8!4!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{8!4!} = \frac{11880}{24} = 495,$$

maneras de escoger 8 miembros. Por otro lado, suponga que deseamos conocer en cuantas formas podemos tener quorum. Como tenemos quorum cuando tenemos 8, 9, 10, 11 o 12 miembros, el número de maneras en que se tiene quorum es:

$$\binom{12}{8} + \binom{12}{9} + \binom{12}{10} + \binom{12}{11} + \binom{12}{12} = 495 + 220 + 66 + 12 + 1 = 794,$$

maneras.

En R se encuentra disponible la función `choose` para el cálculo de combinatorios, es decir podemos obtener los resultados anteriores usando:

```
# quorum mínimo
> choose(12, 8)
[1] 495

# quorum, i.e. 8,9,10,11 o 12 miembros
> accum <- 0
> for (i in 8:12) {
+   accum <- accum + choose(12, i)
+ }
> accum
[1] 794
```

El número  $C_{n,k} = \binom{n}{k}$  es conocido como *coeficiente binomial*, y satisface la siguiente relación

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

A continuación se presenta una propiedad muy relevante del coeficiente binomial.

RESULTADO 1.57 (Triángulo de Pascal). El número  $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ , de  $k$ -combinaciones de  $n$ , satisface la relación de recurrencia

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

para  $k = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$ , con condiciones iniciales

$$\binom{n}{0} = 1, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\binom{n}{k} = 0, \quad k > n.$$

COROLARIO 1.58. El número  $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ , de  $k$ -combinaciones de  $n$ , satisface la relación de recurrencia

$$\binom{n}{k} = \sum_{r=k}^n \binom{r-1}{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n, n = 1, 2, \dots$$

Las definiciones anteriores permiten escribir el siguiente resultado.

RESULTADO 1.59 (Fórmula del binomio de Newton). Sea  $a, b$  dos número reales y  $n$  un entero positivo. Entonces

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

EJEMPLO 1.60. Un caso especial del teorema del binomio es

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Esta fórmula es interesante pues representa el número de todos los subconjuntos posibles que se pueden formar desde un conjunto con  $n$  elementos.

## 1.2. Fundamentos de Probabilidad

El objetivo de esta sección es caracterizar el concepto de *medir un conjunto*. A partir de este momento consideraremos que es posible describir, usando elementos de teoría de conjuntos, el resultado de un experimento aleatorio. En efecto, considere la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.61. El conjunto  $\Omega$ , de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio es llamado *espacio muestral*.

EJEMPLO 1.62. Considere los siguientes experimentos aleatorios.

- Lanzar una moneda, en cuyo caso  $\Omega = \{C, S\}$ .
- Lanzar un dado. De este modo,  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- Jugar al “cachipún” (piedra/papel/tijeras), así  $\Omega = \{\text{papel, piedra, tijeras}\}$ .
- Duración de un artículo eléctrico. En este caso  $\Omega = [0, \infty)$ .

DEFINICIÓN 1.63. Un evento (o suceso) es cualquier colección de resultados posibles de un experimento aleatorio, esto es, cualquier subconjunto de  $\Omega$  (incluyendo al propio  $\Omega$ ).

Sea  $A \subseteq \Omega$ , diremos que  $A$  ocurre si  $\omega \in A$  con  $\omega \in \Omega$  un resultado asociado a un experimento aleatorio. Evidentemente,  $\omega \notin A$  si y sólo si  $A$  no ocurre.

Adicionalmente necesitamos definir una familia de conjuntos, tal que todo evento  $A \subseteq \Omega$ , pertenezca al *espacio de eventos*, denotado por  $\mathcal{F}$ . Es decir,  $\mathcal{F}$  es conjunto



de todos los subconjuntos posibles de  $\Omega$ . Esto es requerido pues, para todo evento  $A \in \mathcal{F}$  deseamos asociar un número entre cero y uno llamado probabilidad de  $A$ . Considere las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 1.64. Una colección de subconjuntos de  $\Omega$  es llamado  $\sigma$ -álgebra y es denotada por  $\mathcal{F}$  si satisface las propiedades:

- (a)  $\emptyset \in \mathcal{F}$ .
- (b) Si  $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$ .
- (c) Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Note que  $\emptyset \subset \Omega$  y  $\Omega = \emptyset^c$ , así por la Propiedad (a) y (b) sigue que  $\Omega \in \mathcal{F}$ . Además, si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  entonces  $A_1^c, A_2^c, \dots \in \mathcal{F}$  y de este modo,  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{F}$ . Por las leyes de De Morgan, tenemos

$$\left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Es decir, tenemos que  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

OBSERVACIÓN 1.65. Asociado a un espacio muestral  $\Omega$  puede haber muchas  $\sigma$ -álgebras. Por ejemplo, la colección  $\{\emptyset, \Omega\}$  es  $\sigma$ -álgebra (minimal).

EJEMPLO 1.66. Considere  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ . Los siguientes subconjuntos de  $\Omega$ , ¿son  $\sigma$ -álgebras?

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}. \end{aligned}$$

Claramente se verifica que  $\mathcal{F}_1$  es una  $\sigma$ -álgebra, mientras que  $\mathcal{F}_2$  no.

DEFINICIÓN 1.67. Sea  $\Omega$  un espacio muestral y sea  $\mathcal{F}$  un  $\sigma$ -álgebra, decimos que el par  $(\Omega, \mathcal{F})$  es un espacio medible. Si  $A \in \mathcal{F}$  decimos que  $A$  es medible.

DEFINICIÓN 1.68 (Probabilidad). Dado un espacio muestral  $\Omega$  y un  $\sigma$ -álgebra asociada  $\mathcal{F}$ , una *función de probabilidad*  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ , satisface:

- (a)  $P(A) \geq 0$ , para todo  $A \in \mathcal{F}$ .
- (b)  $P(\Omega) = 1$ .
- (c) Si  $A_1, A_2, \dots$  son mutuamente excluyentes, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio de medida y  $P$  una medida de probabilidad definida en  $\mathcal{F}$ . Entonces  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se denomina *espacio de probabilidad*.

RESULTADO 1.69. Si  $P$  es una función de probabilidad y  $A$  es cualquier conjunto en  $\mathcal{F}$ , entonces

- (a)  $P(\emptyset) = 0$ .
- (b)  $P(A) \leq 1$ .
- (c)  $P(A^c) = 1 - P(A)$ .

DEMOSTRACIÓN. Primero considere (c). Como  $A$  y  $A^c$  son una partición de  $\Omega$ , sigue que

$$P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1,$$

además  $A \cap A^c = \emptyset$  son disjuntos, luego

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1.$$

Como  $P(A^c) \geq 0$ , (b) sigue desde (c). Finalmente, para probar (a) note que  $\Omega = \Omega \cup \emptyset$  y como  $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$ , tenemos

$$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset),$$

de este modo  $P(\emptyset) = 0$ . □

**RESULTADO 1.70.** *Si  $P$  es una función de probabilidad y  $A, B \in \mathcal{F}$ . Entonces,*

- (a)  $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$ .
- (b)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
- (c) *Si  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Para notar (a) considere que para  $A$  y  $B$  conjuntos cualquiera

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

(pues  $B = B \cup (A \cap A^c) = B \cup \emptyset$ ). Luego,

$$P(B) = P(\{B \cap A\} \cup \{B \cap A^c\}) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c).$$

En efecto,  $(B \cap A) \cap (B \cap A^c) = B \cap (A \cap A^c) \cap B = \emptyset$ . Para probar (b), note que

$$(A \cup B) = A \cup (B \cap A^c).$$

Además,

$$A \cap (B \cap A^c) = (A \cap A^c) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset.$$

Por tanto, sigue que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

por parte (a). Si  $A \subseteq B$  entonces  $A \cap B = A$ . De este modo, usando (a) tenemos

$$0 \leq P(B \cap A^c) = P(B) - P(A),$$

y (c) es verificado. □

Como  $P(A \cup B) \leq 1$ , reagrupando términos tenemos

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1,$$

la desigualdad anterior es un caso particular de la desigualdad de Bonferroni.

**EJEMPLO 1.71.** En una cierta zona urbana, el 60% de los propietarios están suscritos al diario y el 80% está suscrito al servicio de cable, mientras que el 50% está suscrito a ambos servicios. Si un propietario es seleccionado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esté suscrito al menos a uno de estos servicios?

Defina el evento  $A$ : un propietario está suscrito al diario, y  $B$ : un propietario está suscrito al servicio de cable. Se desea calcular la probabilidad

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9.$$

Además, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito sólo a uno de los dos servicios?

$$\begin{aligned} P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] &= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= 0.6 + 0.8 - 2 \cdot 0.5 = 0.4. \end{aligned}$$

**RESULTADO 1.72.** *Si  $P$  es una función de probabilidad. Entonces,*

- (a)  $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i)$  para cualquier partición  $C_1, C_2, \dots$

(b)  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$  para conjuntos  $A_1, A_2, \dots$  cualquiera.<sup>1</sup>

DEMOSTRACIÓN. Dado que  $C_1, C_2, \dots$  forman una partición, tenemos  $C_i \cap C_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$  y  $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ . De ahí que

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i).$$

De este modo,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i),$$

pues, dado que los  $C_i$ 's son disjuntos, también lo es la secuencia  $\{A \cap C_i\}_{i=1}^{\infty}$ .

Para establecer (b) se construye una colección disjunta  $A_1^*, A_2^*, \dots$  tal que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Defina  $A_i^*$ , como

$$\begin{aligned} A_1^* &= A_1, \\ A_i^* &= A_i - \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right), \quad i = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

donde  $A - B = A \cap B^c$  denota la diferencia entre conjuntos. Podemos notar que  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , luego

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^*\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i^*),$$

pues los  $A_i^*$ 's son disjuntos. En efecto,

$$\begin{aligned} A_i^* \cap A_k^* &= \left\{ A_i - \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right\} \cap \left\{ A_k - \left( \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right) \right\} \\ &= \left\{ A_i \cap \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right)^c \right\} \cap \left\{ A_k \cap \left( \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right)^c \right\} \\ &= \left\{ A_i \cap \left( \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j^c \right) \right\} \cap \left\{ A_k \cap \left( \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j^c \right) \right\}, \end{aligned}$$

si  $i > k$  entonces la primera intersección está contenida en  $A_k^c$ , luego esa intersección será vacía. Si  $i < k$  el argumento es similar. Además, por construcción  $A_i^* \subset A_i$  de modo que  $P(A_i^*) \leq P(A_i)$ . Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i^*) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

estableciendo el resultado.  $\square$

<sup>1</sup>Esta es conocida como la *desigualdad de Boole*.

OBSERVACIÓN 1.73. Usando la desigualdad de Boole, tenemos

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c),$$

y como  $\cup A_i^c = (\cap A_i)^c$  y  $\mathbb{P}(A_i^c) = 1 - \mathbb{P}(A_i)$ , tenemos

$$1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \leq n - \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i),$$

es decir

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - (n - 1),$$

que es conocida como la desigualdad de Bonferroni.

**1.2.1. Espacios muestrales finitos.** En esta sección consideraremos que

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\},$$

para caracterizar  $\mathbb{P}(A)$  supondremos eventos elementales, es decir  $A = \{\omega_i\}$  y definimos  $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$  la probabilidad de  $\{\omega_i\}$  tal que,

- (a)  $p_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
- (b)  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .

Suponga ahora que  $A = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_r}\}$  está formado por  $r$  elementos de  $\Omega$ , luego

$$\mathbb{P}(A) = p_{j_1} + \dots + p_{j_r}.$$

Adicionalmente, supondremos que cada  $\{\omega_i\}$  es igualmente probable. Entonces,

$$p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}.$$

Luego, para un evento  $A = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_r}\}$  sigue que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{r}{n},$$

o bien,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{N}(A)}{\mathbb{N}(\Omega)},$$

con  $\mathbb{N}(A)$  la cardinalidad del conjunto  $A$ . Debemos resaltar que esta *no* es una definición general, sino que apropiada *sólo* bajo el supuesto de espacios muestrales finitos y equiprobables.

EJEMPLO 1.74. Se lanza un dados dos veces. Considere los siguientes eventos:

$A$  : la suma de los resultados es menor o igual a 3.

$B$  : el resultado del primer lanzamiento es impar.

Primeramente, describiremos el espacio muestral asociado al experimento, es decir:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Luego,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{N}(A)}{\mathbb{N}(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{N}(B)}{\mathbb{N}(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

Además,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{12} + \frac{18}{36} - \frac{2}{36} = \frac{19}{36}.$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

EJEMPLO 1.75. En un lote de 50 ampollitas hay 2 defectuosas. Se extraen 5 de ellas al azar sin reemplazo. Hallar la probabilidad de que al menos una sea defectuosa. De este modo, considere el evento  $A$  : existe al menos una ampollita defectuosa en las 5 extracciones. De ahí que  $A^c$  : corresponde al evento: ninguna ampollita es defectuosa. Entonces,

$$P(A^c) = \frac{48}{50} \frac{47}{49} \frac{46}{48} \frac{45}{47} \frac{44}{46} = 0.9600 \cdot 0.9592 \cdot 0.9583 \cdot 0.9574 \cdot 0.9565$$

$$= 0.8082.$$

Así,  $P(A) \approx 0.2$ . Note que una manera alternativa de calcular esta probabilidad es usando combinatorios. En efecto,

$$P(A^c) = \frac{\binom{48}{5} \binom{2}{0}}{\binom{50}{5}} = \frac{1\,712\,304}{2\,118\,760} = 0.8082.$$

EJEMPLO 1.76 (Problema del cumpleaños). Para introducir ideas, suponga que existe 50 personas en una sala y que deseamos determinar la probabilidad de que al menos un par de personas tengan la misma fecha de cumpleaños.<sup>2</sup> Para abordar el problema, sea  $A$  el evento de que 2 personas tengan cumpleaños en días *diferentes*, entonces:

$$P(A) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365}.$$

Considere ahora que escogemos una tercera persona, es decir, para el evento  $B$  : que 3 personas tengan cumpleaños en días diferentes, es dado por

$$P(A) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}.$$

Suponga, un poco más generalmente, un grupo de  $k$  personas y suponga que se desea calcular la probabilidad de que al menos 2 personas cumplan años el mismo día. Primeramente defina el evento  $A_k$  :  $k$  personas tienen sus cumpleaños en fechas diferentes. Como el año tiene 365 días, el número de cumpleaños posibles es  $365^k$ . Así,

$$P(A_k) = \frac{(365)_k}{365^k} = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - k + 1)}{365^k} = \frac{365!}{(365 - k)!} \frac{1}{365^k},$$

y por la regla del complemento,

$$P(A_k^c) = 1 - \frac{(365)_k}{365^k}.$$

Es decir, por ejemplo

$k$	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$P(A_k^c)$	0.117	0.253	0.411	0.569	0.706	0.814	0.891	0.941	0.970

<sup>2</sup>No consideraremos el 29 de febrero para este problema.

El siguiente fragmento de código construye el siguiente gráfico:

```
# secuencia con el número de personas
> k <- 1:100

# probabilidad de que k personas cumplan años en fechas diferentes
> diferentes <- function(k) {
+   p <- choose(365, k) * factorial(k) / 365^k
+   p
+ }

# construyendo la tabla anterior
> probs <- 1 - diferentes(k)
> cuales <- seq(10, 50, by = 5)
> probs[cuales]
[1] 0.1169 0.2529 0.4114 0.5687 0.7063 0.8144 0.8912 0.9410 0.9704

# despliega el gráfico en la Figura 2
> plot(k, probs, type = "l", xlab = "Número de personas",
+       ylab = "Probabilidad")
```

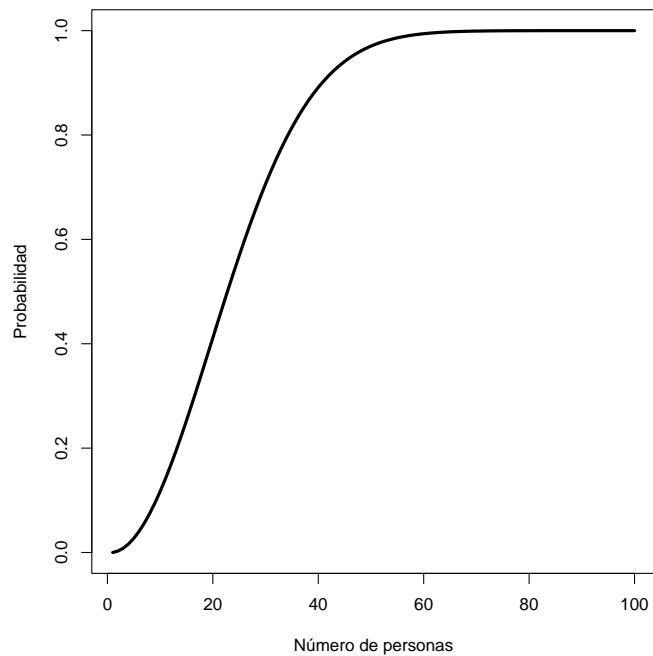


Figura 2. Probabilidad de que dos personas en un grupo tengan cumpleaños el mismo día como una función del número de personas en el grupo.

**1.2.2. Probabilidad condicional.** Para introducir ideas, considere un lote con 80 artículos sin defectos y 20 defectuosos y suponga que se selecciona 2 artículos (a) con sustitución, y (b) sin sustitución. Defina los eventos:

$$A = \{\text{el 1er artículo es defectuoso}\},$$

$$B = \{\text{el 2do artículo es defectuoso}\}.$$

Cuando escogemos *con* sustitución, tenemos:

$$P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

Cuando escogemos *sin* sustitución, tenemos que:

$$P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5},$$

pero, ¿cambia  $P(B)$ ?

DEFINICIÓN 1.77. Si  $A$  y  $B$  son dos eventos en  $\Omega$  y  $P(B) > 0$ , entonces la *probabilidad condicional* de  $A$  dado  $B$ , escrito  $P(A|B)$  es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Note que  $P(B|B) = 1$ , es decir,  $B$  “actúa” como  $\Omega$ . En efecto, como  $A = A \cap \Omega$ , tenemos

$$P(A) = P(A|\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)}.$$

La ocurrencia de  $A$  es calibrada con relación a  $B$ . En particular, si  $A \cap B = \emptyset$ , entonces

$$P(A|B) = P(B|A) = 0.$$

En el ejemplo anterior, se desea calcular  $P(B|A) = 19/99$ , pues si  $A$  ya ha ocurrido sólo quedan 19 defectuosos entre los 99 artículos.

Reexpresando la probabilidad condicional, tenemos

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B),$$

o bien

$$P(A \cap B) = P(B|A) P(A).$$

Las expresiones anteriores permiten “contornar” cálculos complicados, usando<sup>3</sup>

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}.$$

OBSERVACIÓN 1.78. El espacio de probabilidad definido por  $\mathcal{F} \cap B$  permite notar que  $P(A|B)$  es una función de probabilidad, es decir satisface:

- (a)  $P(A|B) \geq 0$ .
- (b)  $P(\Omega|B) = 1$ .
- (c) Para  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  sucesión disjunta

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | B).$$

<sup>3</sup>Esto es un caso particular del Teorema de Bayes.

RESULTADO 1.79 (Probabilidad total). Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad y sea  $C_1, C_2, \dots$ , una partición contable de  $\Omega$  tal que  $P(C_i) \geq 0, \forall i$ . Entonces, para todo  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|C_i) P(C_i).$$

DEMOSTRACIÓN. Como los  $C_i$ 's forman una partición tenemos que

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i).$$

Además,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|C_i) P(C_i).$$

□

RESULTADO 1.80 (Teorema de Bayes). Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  espacio de probabilidad y sea  $\{C_i\}_{i \geq 1}$  partición contable de  $\Omega$  con  $P(C_i) \geq 0, \forall i$ . Entonces, para todo  $A \in \mathcal{F}$ , tenemos que

$$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i) P(C_i)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A|C_k) P(C_k)},$$

siempre que  $P(A) > 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$P(C_i|A) P(A) = P(A|C_i) P(C_i),$$

así

$$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i) P(C_i)}{P(A)}, \quad P(A) > 0,$$

desde el Teorema de probabilidad total, sigue que

$$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i) P(C_i)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A|C_k) P(C_k)}.$$

□

EJEMPLO 1.81. Considere un lote de 20 artículos defectuosos y 80 sin defectos, desde los que se escoge 2 artículos sin reemplazo. Sea

$$A = \{\text{el 1er artículo es defectuoso}\},$$

$$B = \{\text{el 2do artículo es defectuoso}\}.$$

Para calcular  $P(B)$  podemos hacer

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A) P(A) + P(B|A^c) P(A^c) = \frac{19}{99} \frac{1}{5} + \frac{20}{99} \frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{99} (19 + 20 \cdot 4) = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$



**1.2.3. Independencia estadística.** Hasta el momento hemos manipulado situaciones donde los eventos  $A$  y  $B$  están relacionados. A continuación se introduce un concepto clave en estadística que permite caracterizar que dos o más eventos no tienen relación.

DEFINICIÓN 1.82. Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad y sean  $A, B \in \mathcal{F}$ . Se dice que  $A$  y  $B$  son *independientes* si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Naturalmente podemos entender la independencia del siguiente modo: “la ocurrencia de un evento  $B$  no tiene efecto en la probabilidad de otro evento  $A$ ”. Es decir,

$$P(A|B) = P(A).$$

Note también que,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B),$$

es decir, la ocurrencia de  $A$  *no* tiene efecto en  $B$ .

EJEMPLO 1.83. Se tienen tres urnas, la primera con 2 bolas blancas y dos bolas negras, la segunda con dos bolas blancas y una negra y la tercera con tres bolas negras y una blanca.

Suponga que se extrae una bola de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que las tres bolas sean blancas? Para llevar a cabo este cálculo, defina el evento  $B_i$ : extraer una bola blanca de la  $i$ -ésima urna,  $i = 1, 2, 3$ . De este modo, asumiendo independencia obtenemos

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2)P(B_3) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Ahora suponga que se extrae una bola de una urna al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca? Defina los eventos,

- $U_i$ : la bola extraída proviene de la  $i$ -ésima urna,  $i = 1, 2, 3$ .
- $B$ : extraer una bola blanca.

Luego,

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(B|U_i)P(U_i) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \frac{1}{3} = \frac{17}{36}.$$

Si se sabe que la bola extraída es de color blanco, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída de la urna 1? En efecto, deseamos calcular

$$P(U_1|B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|U_1)P(U_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{3}}{\frac{17}{36}} = \frac{6}{17}.$$

RESULTADO 1.84. Si  $A$  y  $B$  son independientes, entonces los siguientes pares también son independientes

- (a)  $A$  y  $B^c$ .
- (b)  $A^c$  y  $B$ .
- (c)  $A^c$  y  $B^c$ .

DEMOSTRACIÓN. Para probar (a), note que

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(B^c). \end{aligned}$$

Partes (b) y (c) son análogas y se dejan de ejercicio para el lector.  $\square$

DEFINICIÓN 1.85. Una colección de eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  es *mutuamente independiente* si para cualquier subcolección  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ , tenemos

$$P\left(\prod_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j}).$$

EJEMPLO 1.86. Se lanzan 3 dados de distinto color: blanco, rojo y negro ¿Cuál es la probabilidad de que el dado blanco salga 3 y los otros dos no? Considere  $A$ ,  $B$  y  $C$  los eventos

$A$  : resultado del dado blanco es 3,

$B$  : resultado del dado rojo es 3,

$C$  : resultado del dado negro es 3,

tenemos  $P(A) = P(B) = P(C) = 1/6$  y se pide calcular

$$P(A \cap B^c \cap C^c) = P(A)P(B^c)P(C^c) = \frac{1}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} = \frac{25}{216}.$$

EJEMPLO 1.87. Suponga que se lanza un dado en dos oportunidades de forma consecutiva. Note que los resultados posibles pueden ser expresados por el conjunto,

$$\begin{aligned} &\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ &(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ &(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ &(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ &(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ &(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}. \end{aligned}$$

Ahora, suponga  $X$  una variable asociada al evento: *La suma de las caras de un dado en dos lanzamientos consecutivos*. Podemos escribir la siguiente tabla con las probabilidades asociadas a cada uno de los resultados que puede adoptar  $X$ , es decir:

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Asimismo, podemos considerar el siguiente gráfico,

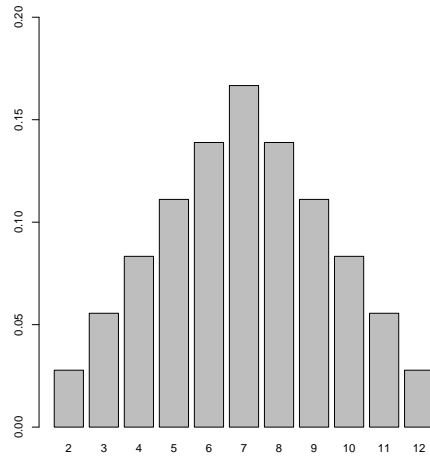


Figura 3. Gráfico de la función de probabilidades asociada a la variable  $X$ .

donde se aprecia que las probabilidades asociadas a variable  $X$  adoptan un comportamiento gobernado por una ley, tópico que será el interés del siguiente capítulo.



## Estadística Descriptiva

La importancia de los contenidos presentados en este capítulo es esencial. A partir del trabajo de [Tukey \(1977\)](#), se ha hecho manifiesta la necesidad de organizar la información disponible de manera apropiada a través de gráficos, así como en medidas de resumen tanto univariadas como multivariadas, esto es, cuando disponemos de múltiples variables o características de interés. Primeramente, se definirá algunas estadísticas de resumen, para luego extender las ideas a dos variables e introducir el importante concepto de correlación. Se presentarán también las ideas básicas de estadísticas descriptivas en el contexto multivariado. La exposición finaliza con algunas recomendaciones sobre despliegues gráficos de uso frecuente.

### 2.1. Estadísticas de Resumen

**2.1.1. Medidas de Posición.** Se introduce una serie de medidas que permiten resumir un gran volumen de información y cuantifican el valor central de un conjunto de datos.

DEFINICIÓN 2.1 (Media muestral o promedio). Sea  $x_1, \dots, x_n$  valores muestrales. Se define el *promedio* o *media muestral* como:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.1)$$

Suponga que la observación  $i$ -ésima, digamos  $x_i$ , se repite  $n_i$  veces. Entonces tenemos que

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i x_i = \sum_{i=1}^n f_i x_i, \quad (2.2)$$

donde  $f_i = n_i/n$  es la frecuencia relativa. Considere “pesos” o ponderaciones  $\omega_1, \dots, \omega_n$  asociados a las observaciones  $x_1, \dots, x_n$ . En este caso tenemos,

$$\bar{x} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \omega_j} \sum_{i=1}^n \omega_i x_i, \quad (2.3)$$

si consideramos la proporción

$$p_i = \frac{\omega_i}{\sum_{j=1}^n \omega_j}, \quad i = 1, \dots, n,$$

entonces podemos re-escribir (2.3) como

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

Note que el promedio en Ecuación (2.2) es un caso particular donde  $\sum_i f_i = 1$ .

EJEMPLO 2.2. Considere el conjunto de datos  $\{1, 2, 2, 2, 3, 3, 8\}$ . Tenemos  $n = 7$ , y

$$\sum_{i=1}^7 x_i = 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 8 = 21,$$

así  $\bar{x} = 21/7 = 3$ . Note también que el gráfico de *tallo y hoja*, adopta la forma:

1	*		
2	* * *		
3	* *		
4			
5			
6			
7			
8	*		

EJEMPLO 2.3 (Datos de accidentes). Suponga el siguiente conjunto de datos:

Número de accidentes ( $x_i$ )	Frecuencia ( $n_i$ )	$n_i x_i$
0	55	0
1	14	14
2	5	10
3	2	6
4	0	0
Total	76	30

De este modo,  $\bar{x} = 30/76 = 0.395$  es el número promedio de accidentes.

Considere que el conjunto de observaciones  $x_1, \dots, x_n$  es ordenado de menor a mayor como:

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)},$$

tal que  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ , donde  $x_{(k)}$  se denomina la  $k$ -ésima estadística de orden.

DEFINICIÓN 2.4 (Mediana). Sean  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$  observaciones ordenadas. Si  $n$  es impar, entonces la *mediana* se define como la observación central, es decir

$$\text{me} = x_{((n+1)/2)},$$

en el caso que  $n$  sea par, entonces

$$\text{me} = \frac{1}{2} \left( x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)} \right).$$

OBSERVACIÓN 2.5. En ocasiones escribiremos  $\text{me}(\mathbf{x})$  para indicar cual es el conjunto de datos sobre el que se calcula la mediana.

DEFINICIÓN 2.6 (Moda). La *moda* o *valor modal* es el valor observado con la más alta ocurrencia.

OBSERVACIÓN 2.7. Respecto de las medidas de tendencia central introducidas anteriormente podemos apreciar que:

- El promedio puede verse fuertemente afectado por *datos atípicos*.
- La mediana “divide” el conjunto de datos en dos, es decir, el 50 % de los datos están por debajo de la mediana, mientras que el 50 % se encuentran por sobre este valor.
- En general, la moda no es única y puede no existir.
- Es interesante notar la diferencia entre la complejidad de cálculo del promedio versus el de la mediana.

OBSERVACIÓN 2.8 (Otras medidas de tendencia central). Sea  $f(x)$  cualquier función de números reales. Entonces podemos definir

$$\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \cdots + f(x_n)).$$

Los siguientes casos particulares son de interés:

- (a) *Média cuadrática*. Considere  $f(x) = x^2$ . Entonces se define la media cuadrática,  $Q$  como:

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

- (b) *Média armónica*. Sea  $f(x) = 1/x$ . Entonces, decimos que  $H$  es la media armónica si

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

Es decir,  $H$  es el inverso de la media aritmética de los inversos de los valores observados. De donde sigue que,

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n 1/x_i}.$$

- (c) *Média geométrica*. Considere  $f(x) = \log x$ . Entonces la media geométrica  $G$  es definida por la fórmula

$$\log G = \frac{1}{n} (\log x_1 + \cdots + \log x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i. \quad (2.4)$$

Es decir,

$$G = \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}.$$

OBSERVACIÓN 2.9. Un procedimiento bastante usado para el cálculo de la média geométrica es obtener la média aritmética dada en la Ecuación (2.4), y luego considerar

$$G = \exp \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i \right).$$

Sin embargo, este método aunque correcto, puede inducir algunos errores en la precisión de los resultados. Una alternativa que intenta corregir esta situación, es basada en el trabajo de [Graillat \(2009\)](#), quien propuso un esquema compensado

para la evaluación de productos utilizando un mecanismo de multiplicación y suma fundidas (FMA). La biblioteca `fastmatrix` (Osorio y Ogueda, 2022), contiene una implementación de la media geométrica usando este enfoque. El siguiente ejemplo, con comandos en R ilustra el uso de la función `geomean`.

```
# introduciendo datos en la consola de R
> x <- c(2.2, 0.3, 0.5, 0.4, 0.2, 1.9)

# cargando biblioteca 'fastmatrix'
> library(fastmatrix)
> geomean(x)
[1] 0.6072855
> exp(mean(log(x))) # equivalente a 'geomean'
[1] 0.6072855
```

**2.1.2. Medidas de Dispersión.** Considere los conjuntos de datos:

$$D_1 = \{10, 20, 30\}, \quad D_2 = \{5, 5, 20, 35, 35\}, \quad D_3 = \{20, 20, 20\}.$$

Tenemos los gráficos de tallo-y-hoja:

Datos $D_1$ :	Datos $D_2$ :	Datos $D_3$ :
5	5   * *	5
10   *	10	10
15	15	15
20   *	20   *	20   * * *
25	25	25
30   *	30	30
35	35   * *	35

Sea  $\bar{x}_j$  y  $me_j$  el promedio y la mediana asociada al conjunto de datos  $D_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Entonces,

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{1}{3}(10 + 20 + 30) = \frac{60}{3} = 20, \\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{5}(2 \cdot 5 + 20 + 2 \cdot 35) = \frac{100}{5} = 20, \\ \bar{x}_3 &= \frac{3 \cdot 20}{3} = 20. \end{aligned}$$

Además,  $me_j = 20$  para  $j = 1, 2, 3$ . Es decir, tenemos tres configuraciones de datos con valores centrales idénticos.

Esto motiva la introducción de medidas que permitan caracterizar la variabilidad o dispersión de un conjunto de observaciones. Algunas medidas simples corresponden a los *cuartiles*. En efecto, sea  $Q_1$  y  $Q_3$  las medianas de la mitad inferior y superior de los datos, respectivamente. Entonces, esto lleva a definir la siguiente medida de dispersión:

$$IQR = Q_3 - Q_1,$$

el que es conocido como *rango intercuartílico*. Es interesante notar que algunos software estadísticos (por ejemplo, R/S-Plus, Stata, entre otros) reportan:

$$\min\{x_i\}_{i=1}^n, Q_1, me, Q_3, \max\{x_i\}_{i=1}^n.$$

Así, también podemos considerar el *rango* de la muestra como

$$R = \max\{x_i\}_{i=1}^n - \min\{x_i\}_{i=1}^n = x_{(n)} - x_{(1)}.$$



Por otro lado, se ha sugerido utilizar subdivisiones más finas que los cuartiles. Por ejemplo, considere subdividir los datos ordenados  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$  en secciones de 100%, llamados *percentiles*. Precisamente, si disponemos de los datos ordenados  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ , entonces el percentil de orden  $j$  ( $1 \leq j \leq 100$ ) está dado por:

$$P_j = x_{(j(n+1)/100)}. \quad (2.5)$$

Debemos notar además que, el primer cuartil  $Q_1$  corresponde al percentil 25<sup>o</sup>, mientras que la mediana (o 2<sup>o</sup> cuartil,  $Q_2$ ) representa el percentil 50<sup>o</sup> y  $Q_3$  corresponde al percentil 75<sup>o</sup>.

**EJERCICIO 2.10.** Considere el conjunto de datos  $\mathbf{x} = (4, 7, 18, 1, 7, 13, 2)^\top$  y suponga que deseamos calcular  $P_{75}$  y el rango intercuartílico *IQR*. Primeramente es necesario ordenar el conjunto de datos:

$$(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, x_{(4)}, x_{(5)}, x_{(6)}, x_{(7)})^\top = (1, 2, 4, 7, 7, 13, 18)^\top.$$

Disponemos de  $n = 7$  datos, luego para obtener el 1er y 3er cuartiles podemos usar la fórmula del percentil en (2.5). En efecto,

$$\begin{aligned} Q_1 = P_{25} &= x_{(25 \cdot (7+1)/100)} = x_{(1.8/4)} = x_{(2)} = 2, \\ Q_3 = P_{75} &= x_{(75 \cdot (7+1)/100)} = x_{(3.8/4)} = x_{(6)} = 13. \end{aligned}$$

De este modo,  $IQR = Q_3 - Q_1 = 13 - 2 = 11$ .

**DEFINICIÓN 2.11** (Varianza muestral). Considere  $x_1, x_2, \dots, x_n$  valores observados, se define su *varianza muestral* como:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (2.6)$$

Note que  $s^2$  corresponde a un “promedio” de los desvios al cuadrado con relación a la media. También se suele anotar  $s_x^2$  o bien  $\text{var}(x)$ .

Aunque en ocasiones es recomendable dividir la suma de cuadrados en (2.6) por  $n$ . En el capítulo sobre inferencia veremos la razón de utilizar  $n - 1$ .

**OBSERVACIÓN 2.12.**  $s = \sqrt{s^2}$  se denomina desviación estándar.

Basados en Ecuación (2.6) podemos definir otras medidas de dispersión:

- *Desviación absoluta en torno de la media*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|. \quad (2.7)$$

- *Desviación absoluta en torno de la mediana*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \text{me}|. \quad (2.8)$$

**OBSERVACIÓN 2.13.** En general podemos considerar, por ejemplo:

$$g(T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(x_i - T(\mathbf{x})),$$

donde  $T(\mathbf{x})$  es alguna estadística de la muestra  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ . Note que si  $T(\mathbf{x}) = \bar{x}$  y  $h(z) = z^2$ , obtenemos la varianza. Mientras que para  $T(\mathbf{x}) = \text{me}$  y  $h(z) = |z|$  obtenemos (2.8).

De este modo, podemos definir el  $r$ -ésimo momento centrado en torno de  $a$ , como

$$M_r(a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^r. \quad (2.9)$$

PROPIEDAD 2.14. A continuación se describen una serie de propiedades del promedio y la varianza de un conjunto de datos observados.

(a)  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ . En efecto,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0.$$

(b) (Fórmula de Köning)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

(c)  $\bar{x}$  es el valor que minimiza la función  $S(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$ . En efecto, note que

$$\frac{d}{da} S(a) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{da} (x_i - a)^2 = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - a),$$

resolviendo la condición de primer orden, tenemos

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{a}) = 0,$$

desde donde sigue que  $\hat{a} = \bar{x}$ . Además

$$\frac{d^2}{da^2} S(a) = -2 \sum_{i=1}^n \frac{d}{da} (x_i - a) = 2n,$$

y como la segunda derivada es positiva (para cualquier valor de  $n$ ), obtenemos que  $\bar{x}$  es mínimo global.

Una manera alternativa para probar este resultado puede ser obtenida mediante notar que

$$\begin{aligned} S(a) &= \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^n \{(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)\}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - a) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + \sum_{i=1}^n (\bar{x} - a)^2. \end{aligned}$$

Por la propiedad en (a) y notando que el término  $(\bar{x} - a)^2$  es constante para la suma. Obtenemos

$$S(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - a)^2,$$

y de este modo, resulta evidente que  $S(a)$  alcanza su mínimo para  $\hat{a} = \bar{x}$ .

(d) Sea  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y considere la transformación

$$y_i = ax_i + b.$$

Entonces

$$\bar{y} = a\bar{x} + b, \quad s_y^2 = a^2 s_x^2.$$

Es fácil notar que,

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b) = \frac{1}{n} \left( a \sum_{i=1}^n x_i + b \right) \\ &= a \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) + b = a\bar{x} + b. \end{aligned}$$

Mientras que

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2,$$

como  $y_i - \bar{y} = ax_i + b - (a\bar{x} + b) = a(x_i - \bar{x})$ , sigue que

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \{a(x_i - \bar{x})\}^2 \\ &= a^2 \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = a^2 s_x^2. \end{aligned}$$

En particular, si (que corresponde a una *estandarización* del conjunto de datos  $x_1, \dots, x_n$ )

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Entonces  $\bar{z} = 0$  y  $s_z^2 = 1$ . En efecto, en la Propiedad 2.14 (d) basta hacer  $a = 1/s$  y  $b = \bar{x}/s$ .

(e) Sea  $x_1, \dots, x_n$  un conjunto de  $n$  observaciones. Considere aplicar la transformación

$$y_i = g(x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

con  $g(\cdot)$  función dos veces diferenciable y suponga que utilizamos una aproximación de Taylor de primer orden en torno del promedio. Es decir,

$$g(x_i) \approx g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x_i - \bar{x}).$$

De este modo,  $\bar{y} = \bar{g}(\mathbf{x})$ , y

$$\begin{aligned} \bar{g}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x_i - \bar{x})\} \\ &= g(\bar{x}) + g'(\bar{x}) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = g(\bar{x}). \end{aligned}$$

Mientras que,

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (g(x_i) - \bar{g}(\mathbf{x}))^2 \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (g(x_i) - g(\bar{x}))^2 \\ &\approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) - g(\bar{x}))^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (g'(\bar{x})(x_i - \bar{x}))^2 = \{g'(\bar{x})\}^2 \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \{g'(\bar{x})\}^2 s_x^2. \end{aligned}$$

Para  $g(x_i) = ax_i + b$  una transformación lineal, tenemos  $g'(x_i)$  y luego, se recupera los resultados dados en el ítem (d). Por otro lado, si consideramos una aproximación de Taylor de segundo orden (en torno de  $\bar{x}$ ),

$$y_i \approx g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + \frac{g''(\bar{x})}{2}(x_i - \bar{x})^2.$$

Obtenemos  $\bar{y} \approx g(\bar{x}) + g''(\bar{x})s_x^2/2$ .

**EJEMPLO 2.15.** Considere un conjunto de datos  $x_1, \dots, x_n$ . Verifique que

$$s^2 = \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

Es fácil notar que

$$(x_i - x_j)^2 = ((x_i - \bar{x}) - (x_j - \bar{x}))^2 = (x_i - \bar{x})^2 + (x_j - \bar{x})^2 - 2(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x}).$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{(x_i - \bar{x})^2 + (x_j - \bar{x})^2 - 2(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})\} \\ &= n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 - 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}). \end{aligned}$$

Usando la Propiedad 2.14 (a), tenemos  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$  (y análogamente para  $\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) = 0$ ), luego

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2 = 2n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Lo que lleva a

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

que es el resultado deseado.

**PROPIEDAD 2.16.** La mediana es el valor que minimiza la función

$$Q(a) = \sum_{i=1}^n |x_i - a|.$$

DEMOSTRACIÓN. Podemos escribir,

$$Q(a) = \sum_{x_i \geq a} (x_i - a) - \sum_{x_i < a} (x_i - a),$$

así

$$\frac{d}{da} Q(a) = - \sum_{x_i \geq a} 1 + \sum_{x_i < a} 1,$$

resolviendo la condición de primer orden  $dQ(a)/da = 0$ , tenemos

$$\sum_{x_i \geq a} 1 = \sum_{x_i < a} 1 \quad \implies \quad \hat{a} = me,$$

por la propia definición de mediana.  $\square$

OBSERVACIÓN 2.17. Recuerde que

$$z = \text{signo}(z) \cdot |z|.$$

De este modo,  $\text{signo}(z) = z/|z|$  (o bien  $|z| = \text{signo}(z) \cdot z$ ). En efecto, tenemos que

$$\frac{d}{dz} |z| = \text{signo}(z), \quad \text{para } z \neq 0.$$

Por tanto, una forma alternativa de escribir  $dQ(a)/da$  es

$$\frac{d}{da} Q(a) = \sum_{i=1}^n \text{signo}(x_i - a),$$

es decir

$$\sum_{i=1}^n \text{signo}(x_i - a) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|x_i - a|} (x_i - a) = \sum_{i=1}^n \omega_i(a)(x_i - a), \quad (2.11)$$

donde  $\omega_i(a) = |x_i - a|^{-1}$  (Ecuación (2.11) es un promedio ponderado). Sin embargo, resolver la condición de primer orden

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(a)(x_i - a) = 0, \quad (2.12)$$

con relación a  $a$  es bastante difícil. Una alternativa es considerar el Algoritmo 1 presentado a continuación.

Debemos destacar que la etapa de actualización dada en la Ecuación (2.13), equivale a resolver

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(a_0)(x_i - a) = 0,$$

con relación a “ $a$ ”, que es muchísimo más simple que resolver (2.12) pues ahora las ponderaciones  $\omega_i(a_0)$  están *fijas*.

---

**Algoritmo 1:** Cálculo de la mediana usando un procedimiento basado en promedios iterativamente ponderados.

---

**Entrada:** Conjunto de  $n$  datos  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ , una aproximación inicial,  $a_0$  (por ejemplo,  $a_0 = \bar{x}$ ) y un valor de tolerancia ( $= 1 \cdot 10^{-6}$ )

**Salida :** Aproximación para el valor de la mediana,  $\hat{a} = \text{me}$ .

1 **begin**

2    Calcular

$$\omega_i(a_0) \leftarrow \frac{1}{|x_i - a_0|}, \quad i = 1, \dots, n.$$

3    Actualizar:

$$a_1 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \omega_j(a_0)} \sum_{i=1}^n \omega_i(a_0) x_i. \quad (2.13)$$

4    **if**  $|a_1 - a_0| < \text{tolerancia}$  **then**

5        **return**  $\text{me} = a_1$ , y detener el algoritmo.

6    **else**

7        hacer,  $a_0 \leftarrow a_1$

8        volver a Paso 2.

9    **end**

10 **end**

---

OBSERVACIÓN 2.18. ¿Qué deficiencias presenta el Algoritmo 1?

- Este algoritmo converge a la mediana (aunque su velocidad de convergencia puede ser bastante lenta).
- En la convergencia, digamos  $\hat{a} = \text{me}$ , tendremos exactamente un “peso”  $\omega_i(\hat{a})$  indefinido (¿Ud. podría ‘adivinar’ cuál?).
- Una alternativa para el punto anterior es usar que<sup>1</sup>

$$\text{signo}(z) \approx \frac{z}{\sqrt{z^2 + \epsilon^2}}.$$

Por tanto, “cerca” del óptimo ( $\hat{a} = \text{me}$ ) podemos considerar los *pesos modificados*:

$$\tilde{\omega}_i(a) = \frac{1}{\sqrt{(x_i - a)^2 + \epsilon^2}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

EJEMPLO 2.19. Considere el siguiente conjunto de datos:

$$\mathbf{x} = (2.40, 2.70, 2.80, 3.03, 3.40, 3.70, 28.95)^\top.$$

Evidentemente el valor 28.95 es una observación que se destaca y puede ser considerada como atípica. Los valores de la media muestral y el desviación estándar están dados por  $\bar{x} = 6.711$  y  $s_x = 9.816$ , respectivamente. En efecto, es posible especular que el valor de la media muestral no representa una buena estimación del

---

<sup>1</sup>Aproximación que mejora conforme  $\epsilon \rightarrow 0$ .

centro de los datos. Suponga que  $\mathbf{z}$  denota el conjunto donde hemos eliminado el valor “sospechoso” de 28.95. En este caso obtenemos,

$$\bar{z} = \frac{18.03}{6} = 3.005, \quad s_z^2 = \frac{1.14075}{5} = 0.2282,$$

con  $s_z = 0.4777$ . Mientras que, cuando calculamos el valor de la mediana para ambos conjuntos de datos obtenemos

$$\text{me}(\mathbf{x}) = 3.03, \quad \text{me}(\mathbf{z}) = \frac{2.80 + 3.03}{2} = 2.915.$$

Es decir, la mediana es un procedimiento muy apropiado para cuantificar el valor central de un conjunto de datos en presencia de observaciones aberrantes o atípicas. Se dice entonces que la mediana es una estadística *robusta*.

Por otro lado, una alternativa robusta a la desviación estandar se conoce como la *desviación mediana absoluta (MAD)*, que es definida como:

$$\text{MAD}(\mathbf{x}) = \text{me}(|\mathbf{x} - \text{me}(\mathbf{x})|).$$

Evaluando esta cantidad para los conjuntos de datos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{z}$ , obtenemos

$$\text{MAD}(\mathbf{x}) = \text{me}\{0.63, 0.33, 0.23, 0.00, 0.37, 0.67, 25.92\} = 0.37$$

$$\text{MAD}(\mathbf{z}) = \text{me}\{0.515, 0.215, 0.115, 0.115, 0.485, 0.785\} = \frac{0.215 + 0.485}{2} = 0.35.$$

Para hacer el MAD comparable con la desviación estándar, se define el *MAD normalizado* como:

$$\text{MADN}(\mathbf{x}) = \frac{\text{MAD}(\mathbf{x})}{0.6745}.$$

De este modo, obtenemos  $\text{MADN}(\mathbf{x}) = 0.5486$  mientras que  $\text{MADN}(\mathbf{z}) = 0.5189$ . Comparativamente con  $s_z = 0.4777$ , claramente MAD no se ve influenciado fuertemente por la presencia de observaciones atípicas. A continuación presentamos un fragmento de comandos en R para el cálculo de algunas estadísticas de resumen:

```
# introduciendo datos en la consola de R
> x <- c(2.40, 2.70, 2.80, 3.03, 3.40, 3.70, 28.95)
> x
[1] 2.40 2.70 2.80 3.03 3.40 3.70 28.95

# removiendo la 7a observación
> z <- x[-7]
> z
[1] 2.40 2.70 2.80 3.03 3.40 3.70

# cálculo de la media muestral
> mean(x)
[1] 6.711429
> mean(z)
[1] 3.005

# cálculo de la mediana
> median(x)
[1] 3.03
> median(z)
[1] 2.915
```

```
# cálculo de la desviación estandar
> sd(x)
[1] 9.815978
> sd(z)
[1] 0.4776505
```

En R está disponible la función `mad`, para el cálculo del MAD o de su versión normalizada.

```
# cálculo del MAD
> abs(x - median(x))
[1] 0.63 0.33 0.23 0.00 0.37 0.67 25.92
> sort(abs(x - median(x)))
[1] 0.00 0.23 0.33 0.37 0.63 0.67 25.92

> mad(x, constant = 1) # MAD
[1] 0.37
> mad(x) # MAD normalizado
[1] 0.548562

> mad(z, constant = 1)
[1] 0.35
> mad(z)
[1] 0.51891
```

DEFINICIÓN 2.20 (Coeficiente de variación). Este coeficiente es una medida que compara la desviación estándar con el promedio de una muestra y es definido como

$$CV = s/\bar{x}, \quad \bar{x} \neq 0.$$

El coeficiente es particularmente útil para comparar dos o más muestras (o grupos). Un valor pequeño para el CV está asociado a una muestra homogénea.

OBSERVACIÓN 2.21. CV es una medida adimensional. Debemos resaltar que, en Econometría,  $1/CV$  es conocido como *razón de Sharpe*.

**2.1.3. Cálculo del promedio y varianzas muestrales.** Es interesante notar que una mala implementación computacional puede hacer que un buen algoritmo sea inútil. Un ejemplo de esto son las pobres implementaciones para el cálculo de estadísticas básicas que son ofrecidas en Microsoft Excel. En efecto, [McCullough y Wilson \(1999, 2002, 2005\)](#) reportan una serie de falencias de los procedimientos estadísticos presentes en Excel. Por otro lado, software estadístico como R (?), o bien hojas de cálculo como Gnumeric<sup>2</sup> disponen de algoritmos confiables (ver, por ejemplo, [Keeling y Pavur, 2007](#)).

La definición de la varianza muestral dada en la Ecuación (2.6) permite sugerir un algoritmo en 2-pasos para el cálculo de  $s^2$  (ver Algoritmo 2). Aunque se ha demostrado que este es un algoritmo estable ([Chan y Lewis, 1979](#); [Chan et al., 1983](#)), puede no ser recomendable para grandes volúmenes de datos debido a que requiere “pasar a través de los datos dos veces”, es decir, requiere usar dos ciclos

<sup>2</sup>URL: [www.gnumeric.org](http://www.gnumeric.org)



for. Mientras que la fórmula de Köning en (2.10) lleva a un algoritmo de 1-paso. En efecto, basado en la fórmula:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2,$$

tenemos la implementación dada en el Algoritmo 3. Desafortunadamente, aunque este procedimiento es más veloz que el Algoritmo 2 (2-pasos), es bien sabido que puede llevar a cancelamientos ‘catastróficos’ y por tanto no es un método recomendable (ver Chan et al., 1983; Barlow, 1993). Para evitar este tipo de dificultades se ha propuesto algoritmos que explotan la definición de la media y varianza muestrales y que solo requieren de pasar por los datos una única vez.

---

**Algoritmo 2:** Varianza muestral usando un algoritmo de 2-pasos.

---

**Entrada:** Conjunto de  $n$  datos  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ .

**Salida :** Promedio y varianza muestrales,  $\bar{x}$  y  $s^2$ .

```

1 begin
2    $M \leftarrow x_1$ 
3   for  $i = 2$  to  $n$  do
4      $M \leftarrow M + x_i$ 
5   end
6    $M \leftarrow M/n$ 
7    $T \leftarrow (x_1 - M)^2$ 
8   for  $i = 2$  to  $n$  do
9      $T \leftarrow T + (x_i - M)^2$ 
10  end
11   $\bar{x} \leftarrow M$ 
12   $s^2 \leftarrow \frac{1}{n-1} T$ 
13 end
```

---



---

**Algoritmo 3:** Varianza muestral usando un algoritmo de 1-paso.

---

**Entrada:** Conjunto de  $n$  datos  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ .

**Salida :** Promedio y varianza muestrales,  $\bar{x}$  y  $s^2$ .

```

1 begin
2    $M \leftarrow x_1$ 
3    $T \leftarrow x_1^2$ 
4   for  $i = 2$  to  $n$  do
5      $M \leftarrow M + x_i$ 
6      $T \leftarrow T + x_i^2$ 
7   end
8    $\bar{x} \leftarrow M/n$ 
9    $s^2 \leftarrow \frac{1}{n-1} T - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2$ 
10 end
```

---

A continuación se describe el *algoritmo online* (1-paso) propuesto por [West \(1979\)](#). Considere una muestra de tamaño  $n$  y sea

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

De este modo, evidentemente tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{x}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n \right) = \frac{1}{n} \left( (n-1)\bar{x}_{n-1} + x_n \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( n\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_{n-1} + x_n \right) = \bar{x}_{n-1} + \frac{x_n - \bar{x}_{n-1}}{n}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

La base del algoritmo propuesto por [West \(1979\)](#) es la relación recursiva definida en la Ecuación (2.14). Sea  $\delta_n = x_n - \bar{x}_{n-1}$ , también podemos definir un algoritmo recursivo para el cálculo de la varianza muestral. En efecto, considere

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x}_n)^2 + (x_n - \bar{x}_n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x}_{n-1} - \delta_n/n)^2 + (x_n - \bar{x}_{n-1} - \delta_n/n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left[ (x_i - \bar{x}_{n-1})^2 - 2\frac{\delta_n}{n}(x_i - \bar{x}_{n-1}) + \frac{\delta_n^2}{n^2} + \left( \delta_n - \frac{\delta_n}{n} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Sabemos por Propiedad 2.14 (a), que

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x}_{n-1}) = 0,$$

De este modo, podemos escribir la suma de cuadrados  $T_n$ , como:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x}_{n-1})^2 + (n-1)\frac{\delta_n^2}{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \delta_n^2 \\ &= T_{n-1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\delta_n^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ecuaciones (2.14) y (2.15) llevan al Algoritmo 4 ([West, 1979](#)), cuya definición se presenta a continuación.

[Chan y Lewis \(1979\)](#) introdujeron una medida que permite evaluar la sensibilidad de una muestra  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$  cuando debemos desarrollar el cálculo de su varianza muestral.

Sea

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

la norma Euclidiana para el conjunto de datos  $\mathbf{x}$ . De este modo, se define el *número condición de una muestra*, como:

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\sqrt{n-1}s}.$$

---

**Algoritmo 4:** Promedio y varianza muestrales usando un algoritmo on-line.

---

**Entrada:** Conjunto de  $n$  datos  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ .

**Salida :** Promedio y varianza muestrales,  $\bar{x}$  y  $s^2$ .

```

1 begin
2    $M \leftarrow x_1$ 
3    $T \leftarrow 0$ 
4   for  $i = 2$  to  $n$  do
5      $\delta \leftarrow (x_i - M)/i$ 
6      $M \leftarrow M + \delta$ 
7      $T \leftarrow T + i(i - 1)\delta^2$ 
8   end
9    $\bar{x} \leftarrow M$ 
10   $s^2 \leftarrow \frac{1}{n - 1}T$ 
11 end

```

---

Esta medida permite cuantificar el efecto de introducir errores en los datos y como éstos son magnificados en el cálculo de la varianza. Es interesante notar que el número condición puede ser utilizado para evaluar la estabilidad de un algoritmo para el cálculo de  $s^2$ . Además podemos verificar fácilmente que el número condición está relacionado con el coeficiente de variación. Considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.22. Sea  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$  una muestra de datos. Verifique que

$$\kappa^2 = 1 + \frac{n}{n-1} CV^{-2}. \quad (2.16)$$

En efecto, sabemos que

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n\bar{x}^2,$$

dividiendo ámbos términos por  $(n-1)s^2$ , obtenemos

$$\kappa^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(n-1)s^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)s^2} + \left(\frac{n}{n-1}\right) \frac{\bar{x}^2}{s^2}.$$

Además  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (n-1)s^2$ , entonces podemos escribir

$$\kappa^2 = 1 + \left(\frac{n}{n-1}\right) \left(\frac{\bar{x}}{s}\right)^2.$$

tenemos  $CV = s/\bar{x}$  y el resultado sigue.

Desde (2.16), sigue que

$$\kappa = \sqrt{1 + n CV^{-2} / (n-1)},$$

es decir, a menos que CV sea bastante grande  $\kappa \approx CV^{-1}$  será una buena aproximación.

Finalmente debemos destacar que Chan et al. (1983) propusieron un algoritmo extremadamente estable para el cálculo de la varianza basado en un procedimiento de *suma acumulada por pares* el cual puede ser fácilmente paralelizado.

**2.1.4. Medidas de forma.** Momentos de orden mayor, o estadísticas involucrando potencias de orden mayor de los datos observados permiten caracterizar la forma de la densidad que describe el mecanismo que genera las  $n$  realizaciones  $x_1, \dots, x_n$  de nuestra variable de interés. A continuación revisamos la definición de los coeficientes de asimetría y curtosis, los que caracterizan el grado de asimetría de una distribución en torno de su promedio y el grado de agudeza o achatamiento de una distribución al ser comparada contra la distribución normal (gaussiana).

DEFINICIÓN 2.23 (Coeficiente de asimetría). Considere  $M_3$  el tercer momento muestral en torno del promedio. Entonces, se define el *coeficiente de asimetría* (o sesgo) como:

$$b_1 = \frac{M_3}{s^3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3.$$

OBSERVACIÓN 2.24.  $b_1$  también es conocido como coeficiente de asimetría de Fisher y se caracteriza por ser una medida adimensional así como por ser invariante bajo traslaciones del origen y transformaciones de escala. Considere los gráficos desplegados en la Figura 1

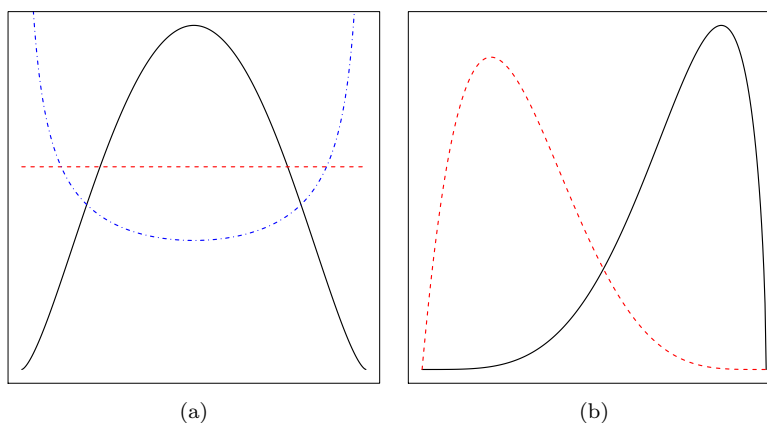


Figura 1. (a) distribuciones simétricas, (b) distribución con asimetría negativa (—) y asimetría positiva (— —).

- Si  $b_1 = 0$  la distribución es simétrica con relación a la media.
- Si  $b_1 > 0$  la distribución tiene sesgo positivo (o hacia la derecha), en cuyo caso la distribución tiende a concentrarse en valores altos de la variable. En caso contrario ( $b_1 < 0$ ), diremos que su sesgo es negativo (o que es asimétrica hacia la izquierda).

OBSERVACIÓN 2.25. Se han definido varios índices de simetría, por ejemplo el *coeficiente de asimetría de Galton*:

$$b_G = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}.$$

DEFINICIÓN 2.26 (Coeficiente de curtosis). Considere  $M_4$  el cuarto momento muestral en torno del promedio. Entonces, se define el *coeficiente de curtosis* (o achataamiento) como:

$$b_2 = \frac{M_4}{s^4} - 3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^4 - 3.$$

OBSERVACIÓN 2.27. El término  $-3$  hace que  $b_2 = 0$  cuando los datos siguen una distribución normal (gaussiana) en cuyo caso decimos que la distribución es *mesocúrtica*. Considere la Figura 2, si  $b_2 > 0$  la distribución de los datos es más aguzada que la distribución normal (distribución *leptocúrtica*), mientras que si  $b_2 < 0$  la distribución es más achatada que la normal (distribución *platicúrtica*).

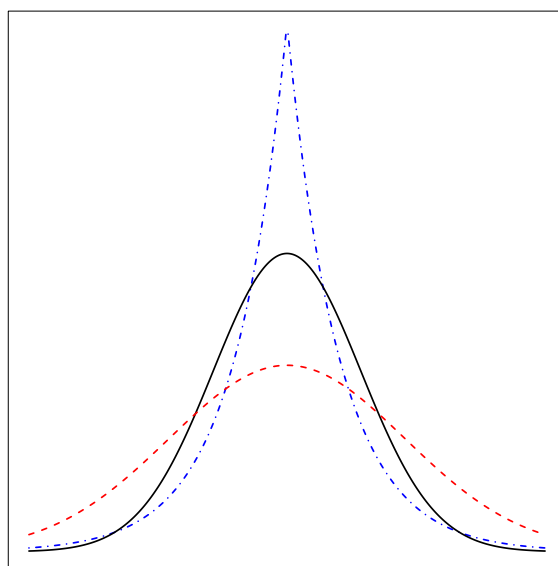


Figura 2. Distintos grados de curtosis: distribución leptocúrtica (---), mesocúrtica (—) y platicúrtica (- -).

OBSERVACIÓN 2.28. Debemos destacar que Spicer (1972) propuso calcular momentos centrales de hasta cuarto orden,  $M_2$ ,  $M_3$  y  $M_4$  usando un algoritmo online. La función `moments` desde la biblioteca `fastmatrix` permite el cálculo de los coeficientes  $b_1$  y  $b_2$ .

**2.1.5. Estadísticas de resumen para datos agrupados.** Cuando los datos han sido organizados en una *tabla de frecuencias* se dice que los datos se encuentran agrupados. El objetivo de esta sección es proporcionar fórmulas para las medidas de posición (o tendencia central), de dispersión y de forma sin la necesidad de desagregar los datos. Primeramente vamos a suponer que la variable de interés es discreta. Considere el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2.29. Se consultó las fichas de los empleados de una fábrica, registrándose el *número de cargas familiares* y se obtuvo los siguientes datos:

1 2 4 2 2 2 3 2 1 1 0 2 2  
0 2 2 1 2 2 3 1 2 2 1 2

En cuyo caso, tenemos que la tabla de frecuencias asociada asume la forma:

Cargas familiares	Número de empleados	Porcentaje de empleados	Num. acumulado de empleados	Porcentaje acumulado
0	2	8 %	2	8 %
1	6	23 %	8	32 %
2	14	56 %	22	88 %
3	2	8 %	24	96 %
4	1	4 %	25	100 %
Total	25	100 %	–	–

Podemos notar que los datos de interés corresponden a una variable discreta  $x$  (número de cargas familiares) que tiene  $k$  categorías. De este modo, podemos construir la siguiente tabla

Variable	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Frec. Abs. Acumulada	Frec. Rel. Acumulada
$x_1$	$n_1$	$f_1$	$N_1$	$F_1$
$x_2$	$n_2$	$f_2$	$N_2$	$F_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_k$	$n_k$	$f_k$	$N_k$	$F_k$
Total	$n$	1	–	–

donde

$$f_i = \frac{n_i}{n}, \quad N_i = \sum_{j=1}^i n_j, \quad F_i = \sum_{j=1}^i f_j, \quad (2.17)$$

para  $i = 1, \dots, k$ . Evidentemente tenemos que

$$\sum_{i=1}^k n_i = n, \quad N_k = n, \quad \sum_{i=1}^k f_i = 1, \quad F_k = 1. \quad (2.18)$$

En este contexto tenemos que la media y varianza muestrales están dados por

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \sum_{i=1}^k f_i x_i,$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2.$$

Para los datos del Ejemplo 2.29, es fácil notar que

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 14 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{25} = \frac{44}{25} = 1.760$$

$$s^2 = \frac{2(0 - 1.76)^2 + 6(1 - 1.76)^2 + 14(2 - 1.76)^2 + 2(3 - 1.76)^2 + 1(4 - 1.76)^2}{25 - 1}$$

$$= \frac{18.56}{24} = 0.773$$

Para datos continuos  $x_1, \dots, x_n$  tenemos la tabla de frecuencias:

Marca de clase	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Frec. Abs. Acumulada	Frec. Rel. Acumulada
$C_1$	$n_1$	$f_1$	$N_1$	$F_1$
$C_2$	$n_2$	$f_2$	$N_2$	$F_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$C_k$	$n_k$	$f_k$	$N_k$	$F_k$
Total	$n$	1	–	–

donde  $f_i$ ,  $N_i$  y  $F_i$ , para cada una de las  $k$  categorías ha sido definido en (2.17) y (2.18), mientras que la *marca de clase* es definida como:

$$C_i = \frac{L_i + U_i}{2}, \quad i = 1, \dots, k,$$

con  $L_i$  y  $U_i$  los límites inferior y superior de cada intervalo, respectivamente. Note que la marca de clase es un representante de la clase (intervalo) respectiva. Análogamente a caso de una tabla de frecuencias para datos discretos, tenemos que:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i C_i = \sum_{i=1}^k f_i C_i,$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (C_i - \bar{x})^2.$$

EJEMPLO 2.30. Considere los *precios de cierre* de acciones una determinada empresa nacional, dados por:

179	173	181	170	158	174	172	166	194	185
162	187	198	177	178	165	154	188	166	171
175	182	167	169	172	186	172	176	168	187

cuya tabla de frecuencias asume la forma:

Precio de cierre	Marca de clase	Número de días	Porcentaje de días	Num. de días acumulado	Porcentaje acumulado
(150,160]	155	2	7%	2	7%
(160,170]	165	8	27%	10	34%
(170,180]	175	11	36%	21	70%
(180,190]	185	7	23%	28	93%
(190,200]	195	2	7%	30	100%
Total	–	30	100%	–	–

De este modo, podemos calcular la media y varianza muestrales desde la tabla de frecuencias, como:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 155 + 8 \cdot 165 + 11 \cdot 175 + 7 \cdot 185 + 2 \cdot 195}{30} = \frac{5240}{30} = 174.667$$

mientras que,

$$\sum_{i=1}^5 n_i (C_i - \bar{x})^2 = 2(155 - 174.667)^2 + 8(165 - 174.667)^2 + 11(175 - 174.667)^2$$

$$+ 7(185 - 174.667)^2 + 2(195 - 174.667)^2 = 3096.667,$$

de este modo,  $s^2 = 3096.667/(30-1) = 106.782$ . Es interesante notar que los valores de la media y varianza muestrales obtenidos a partir de una tabla de frecuencias corresponden a una *aproximación* de los valores obtenidos a partir de los *datos a granel*. En efecto, el siguiente fragmento en R considera los datos crudos:

```
# precios de cierre (datos a granel)
> x <- c(179, 173, 181, 170, 158, 174, 172, 166, 194, 185,
+ 162, 187, 198, 177, 178, 165, 154, 188, 166, 171, 175,
+ 182, 167, 169, 172, 186, 172, 176, 168, 187)

# cálculo de media y varianza muestrales
> mean(x)
[1] 175.0667
> var(x)
[1] 105.7195
```

Se ha sugerido una serie de procedimientos para la construcción de tablas de frecuencia. Considere los siguientes pasos:

- Determinar el *número de categorías*,  $k$  usando por ejemplo:

$$k = \sqrt{n},$$

$$k = 1 + 3.3 \log_{10}(n), \quad (\text{regla de Sturges})$$

$$k = \lceil 2n^{1/3} \rceil, \quad (\text{regla de Rice})$$

- Calcular el rango,

$$R = \max\{x_i\}_{i=1}^n - \min\{x_i\}_{i=1}^n,$$

- Determinar la *longitud de los intervalos*  $a_i$  para  $i = 1, \dots, k$ . Usualmente, podemos elegir una longitud constante,  $a_i = a$  como:

$$a = \frac{R}{k},$$

- Finalmente, construir los *límites de clases*

$$\begin{aligned} L_1 &= \min\{x_i\}_{i=1}^n - \Delta, & U_1 &= L_1 + a, \\ L_2 &= U_1, & U_2 &= L_2 + a, \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

Debemos resaltar que aunque este tipo de procedimientos suelen ser bastante apropiados en la construcción de tablas de frecuencia, deben ser entendidos meramente como *reglas de trabajo*.

Considere la función de distribución acumulada presentada en la figura a continuación. De este modo, podemos usar interpolación lineal para determinar la mediana en datos agrupados. En efecto,

$$\frac{1/2 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} = \frac{\text{me} - L_i}{U_i - L_i},$$

es decir,

$$(1/2 - F_{i-1})(U_i - L_i) = (\text{me} - L_i)(F_i - F_{i-1}),$$

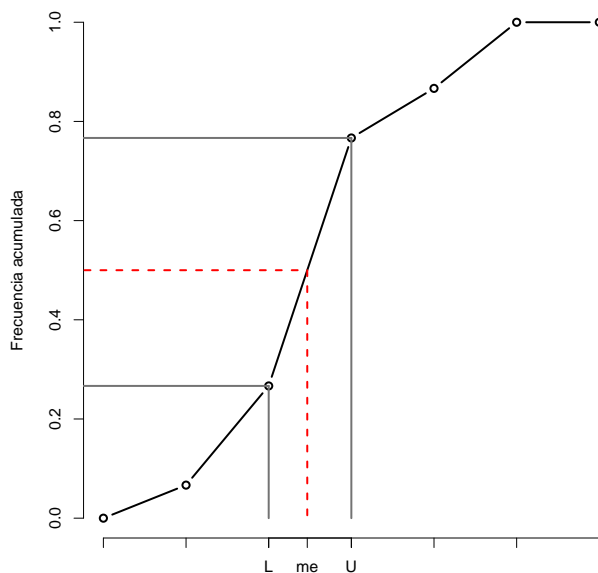
o bien

$$\text{me} = L_i + \frac{1/2 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}(U_i - L_i) = L_i + \frac{1/2 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} a_i,$$



donde  $a_i = U_i - L_i$ , representa la amplitud de la clase mediana. Recordando que  $F_i = \sum_{j=1}^i f_j$ , tenemos

$$F_i - F_{i-1} = \sum_{j=1}^i f_j - \sum_{j=1}^{i-1} f_j = f_i + \sum_{j=1}^{i-1} f_j - \sum_{j=1}^{i-1} f_j = f_i.$$



Además, como  $f_i = n_i/n$  y  $F_i = N_i/n$ , podemos re-escribir la *mediana para datos agrupados* como:

$$\begin{aligned} \text{me} &= L_i + \frac{1/2 - F_{i-1}}{f_i} a_i = L_i + \frac{1/2 - F_{i-1}}{n_i/n} a_i \\ &= L_i + \frac{n/2 - N_{i-1}}{n_i} a_i \end{aligned}$$

Siguiendo exactamente la misma lógica, tenemos que el percentil  $k$ -ésimo, digamos  $P_k$  es dado por

$$P_k = L_i + \frac{k/100 - F_{i-1}}{f_i} a_i,$$

o bien

$$P_k = L_i + \frac{n(k/100) - N_{i-1}}{n_i} a_i.$$

**EJEMPLO 2.31.** Los trabajadores de una empresa, cuya tarea es clasificar y envasar fruta, obtuvieron los siguientes salarios semanales (clasificados según sexo). Consideraremos solamente el grupo de mujeres y dejaremos el análisis del grupo de hombres y el total de trabajadores como ejercicio. Así, la tabla de frecuencias para el grupo de mujeres adopta la forma:

Ingreso (UM)	Mujeres	Hombres
65 - 75	10	0
75 - 85	15	0
85 - 95	60	5
95 - 105	15	10
105 - 115	10	50
115 - 125	0	25
125 - 135	0	10
Total	110	100

Ingreso (UM)	$C_i$	$n_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$
65 - 75	70	10	0.090	10	0.090
75 - 85	80	15	0.136	25	0.226
85 - 95	90	60	0.548	85	0.774
95 - 105	100	15	0.136	100	0.910
105 - 115	110	10	0.090	110	1.000
Total	-	110	1.000	-	-

En este caso, tenemos  $n = 110$  y  $\sum_{i=1}^5 n_i C_i = 9900$ . De este modo, la media aritmética para el grupo de mujeres es:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^5 n_i C_i = \frac{9900}{110} = 90 \text{ (UM)}.$$

Para calcular la mediana, primero debemos ubicar el intervalo mediano. En efecto, debemos ubicar la primera frecuencia relativa acumulada ( $F_i$ ) que supere 0.5 (o bien, frecuencia absoluta acumulada ( $N_i$ ) que supere  $n/2$ ). De este modo el intervalo mediano es  $(85, 95]$ . Además,  $a_i = 10$  para todos los intervalos. De este modo,

$$\text{me} = L_i + \frac{1/2 - F_{i-1}}{f_i} a_i,$$

donde  $L_i = 85$ ,  $F_{i-1} = 0.226$ ,  $f_i = 0.548$  y  $a_i = 10$ , luego

$$\text{me} = 85 + \frac{0.500 - 0.226}{0.548} \cdot 10 = 85 + 0.5 \cdot 10 = 90 \text{ (UM)}.$$

Por otro lado,

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^5 n_i C_i^2 - n \bar{x}^2 \right).$$

En nuestro caso,

$$\sum_{i=1}^5 n_i C_i^2 = 902\,000, \quad \bar{x}^2 = 8\,100.$$

Así,

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{110-1} (902\,000 - 110 \cdot 8\,100^2) = \frac{1}{109} (902\,000 - 891\,000) \\ &= \frac{11\,000}{109} = 100.9174 \text{ (UM)}^2. \end{aligned}$$

Además, tenemos que  $s = \sqrt{11\,000/109} = 10.0458$  (UM). Mientras que

$$CV = \frac{10.0458}{90} = 0.1116.$$

Podemos evaluar la simetría usando el coeficiente de Galton. Por tanto, debemos calcular  $Q_1$  y  $Q_3$ , como:

$$Q_1 = 85 + \frac{0.250 - 0.226}{0.548} \cdot 10 = 85.438$$

$$Q_3 = 85 + \frac{0.750 - 0.226}{0.548} \cdot 10 = 94.562,$$

de este modo  $IQR = 9.1240$ , y

$$\begin{aligned} \gamma_G &= \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} \\ &= \frac{(94.562 - 90) - (90 - 85.438)}{9.124} = \frac{4.562 - 4.562}{9.124} = 0.000 \end{aligned}$$

Es decir, la distribución de los datos es simétrica.

Mientras que la moda interpolada, es dada por

$$mo = L_m + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} a_m,$$

donde

- $L_m$  es el límite inferior de la clase modal.
- $\Delta_1 = n_m - n_{m-1}$  con  $n_m$  la frecuencia absoluta de la clase modal, mientras que  $n_{m-1}$  es la frecuencia absoluta de la clase anterior a la clase modal.
- $\Delta_2 = n_m - n_{m+1}$  con  $n_{m+1}$  la frecuencia absoluta de la clase posterior a la clase modal.
- $a_m$  es la amplitud de la clase modal.

**OBSERVACIÓN 2.32.** La clase modal es aquella que tiene la mayor frecuencia relativa. Note además, que en una tabla de frecuencia podría existir más de una clase modal.

## 2.2. Covarianza y correlación

Considere  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$  y  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$  dos vectores de datos con  $n$  observaciones. En esta sección se introducen medidas de asociación entre variables continuas y ordinales. Primeramente se introduce el concepto de covarianza.

**DEFINICIÓN 2.33** (Covarianza). Para el conjunto  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , se define la covarianza como una medida de variabilidad conjunta de dos variables cuantitativas, como:

$$\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

**OBSERVACIÓN 2.34.** En efecto, es fácil apreciar que  $\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = s_x^2$ . Además, evidentemente la covarianza está relacionada con el producto interno entre dos vectores  $n$ -dimensionales,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ .

EJEMPLO 2.35. Tal como en la Propiedad 2.14 (b), a continuación derivamos una expresión alternativa para la covarianza. En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n x_i(y_i - \bar{y}) - \bar{x} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}.\end{aligned}$$

De este modo, podemos escribir

$$\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} \right).$$

PROPIEDAD 2.36. Tenemos que

$$\text{cov}(a\mathbf{x} + b, c\mathbf{y} + d) = ac \text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $z_i = ax_i + b$  y  $w_i = cy_i + d$  para  $i = 1, \dots, n$ . Entonces  $\bar{z} = a\bar{x} + b$  y  $\bar{w} = c\bar{y} + d$ , luego

$$\text{cov}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})(w_i - \bar{w}),$$

como  $z_i - \bar{z} = a(x_i - \bar{x})$  y  $w_i - \bar{w} = c(y_i - \bar{y})$ . Entonces

$$\text{cov}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \frac{1}{n-1} ac \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

que es el resultado deseado.  $\square$

La covarianza permite medir la asociación, pero depende de la unidad de medida. Una alternativa es usar una medida conocida como *correlación*.

DEFINICIÓN 2.37 (Correlación). La correlación entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  es la covarianza de sus versiones estandarizadas. Es decir,

$$\begin{aligned}\text{cor}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right) \left( \frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \\ &= \frac{\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{s_x s_y}.\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 2.38.  $\text{cor}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  es una medida adimensional.

EJERCICIO 2.39. Muestre que

$$\text{cor}(a\mathbf{x} + b, c\mathbf{y} + d) = \pm \text{cor}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

EJEMPLO 2.40. Verifique que

$$s_{x+y}^2 = s_x^2 + s_y^2 + 2 \text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s_x^2 + s_y^2 + 2 \text{cor}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) s_x s_y.$$

En efecto, podemos notar que

$$\begin{aligned} s_{x+y}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x}) + (y_i - \bar{y}))^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right) \\ &= s_x^2 + s_y^2 + 2 \operatorname{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 2.41. Cuando  $\operatorname{cor}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  diremos que  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  son *no correlacionados*.

OBSERVACIÓN 2.42. Si  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  son no correlacionados, entonces

$$s_{x+y}^2 = s_x^2 + s_y^2.$$

PROPIEDAD 2.43. Tenemos que  $\{\operatorname{cor}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}^2 \leq 1$ .

DEMOSTRACIÓN. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz<sup>3</sup>, tenemos que

$$\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right),$$

es decir,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right)^2 &\leq \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right) \\ \{\operatorname{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}^2 &\leq s_x^2 s_y^2. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\frac{\operatorname{cov}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{s_x^2 s_y^2} \leq 1.$$

□

Evidentemente, desde la propiedad anterior tenemos  $-1 \leq \operatorname{cor}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 1$ .

Para datos que no son de naturaleza continua, una alternativa es reemplazar el valor de  $x_i$  ( $y_i$ ) por su rango,  $R_i$  ( $S_i$ ) que corresponde a un valor en el conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Considere la siguiente definición

DEFINICIÓN 2.44 (Coeficiente de correlación de Spearman). Suponga el conjunto de datos pareados  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  y sea  $R_i$  el rango de  $x_i$  y  $S_i$  el rango de  $y_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Entonces el coeficiente de correlación de Spearman es dado por

$$r_S = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2 \sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2}}.$$

Considere

$$D = \sum_{i=1}^n (R_i - S_i)^2,$$

y suponga que no existen empates entre los  $x$ 's e  $y$ 's, entonces podemos escribir

$$r_S = 1 - \frac{6D}{n(n^2 - 1)}.$$

<sup>3</sup>Recuerde que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$

OBSERVACIÓN 2.45. Análogamente a los resultados expuestos en la Sección 2.1.3, podemos llevar a cabo el cálculo de la covarianza entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  de manera eficiente considerando,

$$C_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n) + (x_n - \bar{x}_n)(y_n - \bar{y}_n).$$

Sea  $\delta_n = x_n - \bar{x}_{n-1}$ , de este modo podemos escribir:

$$x_i - \bar{x}_n = x_i - \bar{x}_{n-1} - \frac{\delta_n}{n}, \quad x_n - \bar{x}_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\delta_n,$$

y análogamente,

$$y_i - \bar{y}_n = y_i - \bar{y}_{n-1} - \frac{\eta_n}{n}, \quad y_n - \bar{y}_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\eta_n,$$

con  $\eta_n = y_n - \bar{y}_{n-1}$ . Notando que

$$\begin{aligned} (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n) &= \left\{ (x_i - \bar{x}_{n-1}) - \frac{\delta_n}{n} \right\} \left\{ (y_i - \bar{y}_{n-1}) - \frac{\eta_n}{n} \right\} \\ &= (x_i - \bar{x}_{n-1})(y_i - \bar{y}_{n-1}) - (x_i - \bar{x}_{n-1})\frac{\eta_n}{n} \\ &\quad - \frac{\delta_n}{n}(y_i - \bar{y}_{n-1}) + \frac{\delta_n\eta_n}{n^2}. \end{aligned}$$

Sumando sobre  $\{1, \dots, n-1\}$  y recordando que

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x}_{n-1}) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - \bar{y}_{n-1}) = 0,$$

sigue que

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x}_{n-1})(y_i - \bar{y}_{n-1}) + \left(\frac{n-1}{n^2}\right)\delta_n\eta_n + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\delta_n\eta_n \\ &= C_{n-1} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\delta_n\eta_n. \end{aligned}$$

Así, haciendo  $\text{cov}_n = \text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , tenemos

$$\text{cov}_n = \frac{1}{n-1} C_n = \frac{1}{n-1} \left\{ C_{n-1} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\delta_n\eta_n \right\},$$

pero  $C_{n-1} = ((n-1)-1)\text{cov}_{n-1} = (n-1)\text{cov}_{n-1} - \text{cov}_{n-1}$ . De este modo,

$$\begin{aligned} \text{cov}_n &= \frac{1}{n-1} \left\{ (n-1)\text{cov}_{n-1} - \text{cov}_{n-1} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\delta_n\eta_n \right\} \\ &= \text{cov}_{n-1} - \frac{\text{cov}_{n-1}}{n-1} + \frac{(x_n - \bar{x}_{n-1})(y_n - \bar{y}_{n-1})}{n}. \end{aligned}$$

Este desarrollo lleva al siguiente algoritmo:

---

**Algoritmo 5:** Covarianza muestral usando un algoritmo online.

---

**Entrada:** Conjuntos de  $n$  datos  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ .

**Salida :** Covarianza muestral,  $\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

```

1 begin
2    $M \leftarrow x_1$ 
3    $N \leftarrow y_1$ 
4    $C \leftarrow 0$ 
5   for  $i = 2$  to  $n$  do
6      $\delta \leftarrow (x_i - M)/i$ 
7      $\eta \leftarrow (y_i - N)/i$ 
8      $M \leftarrow M + \delta$ 
9      $N \leftarrow N + \eta$ 
10     $C \leftarrow C - \frac{C}{i-1} + i\delta\eta$ 
11  end
12   $\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leftarrow C$ .
13 end
```

---

Además, es fácil notar que modificando ligeramente el Algoritmo 5 podemos obtener también  $\bar{x}_n$ ,  $\bar{y}_n$ ,  $s_x^2$  y  $s_y^2$ .

### 2.3. Estadísticas descriptivas multivariadas

Considere que nuestro interés es estudiar  $p \geq 2$  variables (características) de interés asociadas a una muestra aleatoria  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  donde cada  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^\top$  es un vector  $p$ -dimensional. Note que, podemos disponer la información en una *matriz de datos*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^\top \\ \mathbf{x}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^\top \end{pmatrix}.$$

Análogamente a la media y varianza muestrales  $\bar{x}$  y  $s^2$  unidimensionales, respectivamente, podemos definir sus contrapartes multivariadas como:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i,$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top.$$

Además, la matriz de correlación entre las  $p$  variables de interés, es dada por:

$$\mathbf{R} = (r_{ij}),$$

donde

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{kj} - \bar{x}_j)^2}} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}s_{jj}}},$$

con  $\mathbf{S} = (s_{ij})$  y  $\bar{x}_i = (\sum_{k=1}^n x_{ki})/n$ . Sea,  $\mathbf{D} = \text{diag}(s_{11}, s_{22}, \dots, s_{pp})$ , así podemos escribir

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{S} \mathbf{D}^{-1/2}.$$

OBSERVACIÓN 2.46. Algunas propiedades del vector de medias y la matriz de covarianza, surgen de escribir formas compactas que dependen de la matriz de datos  $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . En efecto,

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i = \frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \mathbf{1}.$$

Además,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{x}_i^\top - \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{x}}^\top \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top - \bar{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^\top = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top - n \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}}^\top \end{aligned}$$

Es fácil notar que  $\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top = \mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ , de este modo,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{n-1} \mathbf{Q} = \frac{1}{n-1} \left\{ \mathbf{X}^\top \mathbf{X} - n \left( \frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \mathbf{1} \right) \left( \frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \mathbf{1} \right)^\top \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \mathbf{X}^\top \mathbf{X} - \frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \mathbf{X} \right) = \frac{1}{n-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{C} \mathbf{X} \end{aligned}$$

con  $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top$  la matriz de centrado. Es sencillo mostrar que

$$\mathbf{C}^\top = \mathbf{C}, \quad \mathbf{C}^2 = \mathbf{C},$$

es decir  $\mathbf{C}$  es matriz de proyección. Esto lleva al siguiente resultado.

PROPIEDAD 2.47. La matriz de covarianza  $\mathbf{S}$ , es semidefinida positiva.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ , vector no nulo. Tenemos que,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\top \mathbf{S} \mathbf{a} &= \frac{1}{n-1} \mathbf{a}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{C} \mathbf{X} \mathbf{a} = \frac{1}{n-1} \mathbf{a}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{C}^2 \mathbf{X} \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{n-1} \mathbf{u}^\top \mathbf{u} \geq 0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{C} \mathbf{X} \mathbf{a}, \end{aligned}$$

es decir,  $\mathbf{S}$  es matriz semidefinida positiva.<sup>4</sup> □

Considere la siguiente transformación:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{A} \mathbf{x}_i + \mathbf{b}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Entonces,  $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$ , mientras que

$$\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{x}_i + \mathbf{b} - \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}).$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_y &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^\top = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top \mathbf{A}^\top \\ &= \frac{1}{n-1} \mathbf{A} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top \mathbf{A}^\top = \mathbf{A} \mathbf{S}_x \mathbf{A}^\top. \end{aligned}$$

<sup>4</sup> $\mathbf{S}$  será definida positiva si  $n \geq p + 1$ .



En particular, para la transformación (de Mahalanobis),

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{S}^{-1/2}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}), \quad i = 1, \dots, n,$$

donde  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{1/2}\mathbf{S}^{1/2}$  con  $\mathbf{S}^{1/2}$  un factor raíz cuadrada de  $\mathbf{S}$ . Entonces, sigue que

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{0}, \quad \text{y} \quad \mathbf{S}_z = \mathbf{I}_p.$$

DEFINICIÓN 2.48 (Distancia de Mahalanobis). Considere una muestra de  $n$  observaciones  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  de este modo, la distancia de Mahalanobis es dada por

$$D_i = \{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})\}^{1/2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

como la distancia de la observación  $i$ -ésima hacia el “centro” de los datos,  $\bar{\mathbf{x}}$  ponderada por la matriz de covarianza.

Sea

$$g_{ij} = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

lo que permite definir medidas de sesgo y curtosis multivariadas (Mardia, 1970), dadas por

$$b_{1p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}^3, \quad b_{2p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_{ii}^2,$$

respectivamente. Las cantidades anteriores llevan a un test para evaluar la normalidad multivariada (ver Mardia, 1974).

EJEMPLO 2.49. El conjunto de datos de flores Iris (Fisher, 1936), corresponden a 150 mediciones (en centímetros) del largo y ancho de los sépalos y largo y ancho de los pétalos para flores iris de las especies Setosa, Versicolor y Virginica. Los siguientes comandos en R permiten obtener el diagrama de dispersión así como algunas estadísticas de resumen para los datos de Iris

```
# datos Iris (50 observaciones por cada especie)
> iris
  Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width Species
1           5.1           3.5           1.4           0.2   setosa
2           4.9           3.0           1.4           0.2   setosa
3           4.7           3.2           1.3           0.2   setosa
...
149          6.2           3.4           5.4           2.3  virginica
150          5.9           3.0           5.1           1.8  virginica
```

El siguiente fragmento de código crea el gráfico de dispersión desplegado en la Figura 3 el cual revela una separación evidente en dos grupos (Setosa versus Versicolor y Virginica).

```
# extraémos solamente variables numéricas
> x <- iris[,1:4]
> pairs(x, col = iris$Species) # Fig.3
```

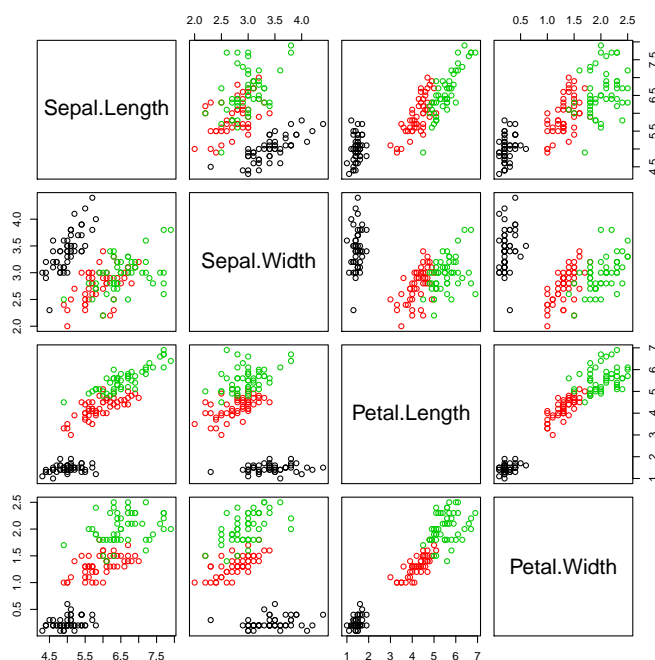


Figura 3. Gráficos de dispersión para los datos de Iris, según variedades Setosa (negro), Versicolor (rojo) y Virginica (verde).

Los siguientes comandos invocan funciones desde la biblioteca `fastmatrix`

```
# Carga biblioteca 'fastmatrix'
> library(fastmatrix)
# Cálculo de estadísticas de resumen multivariadas
> z <- cov.weighted(x) # por defecto, los 'pesos' son 1
> xbar <- z$mean
> S <- z$cov
> R <- cov2cor(z$cov)
> b1 <- skewness(x)
> b2 <- kurtosis(x)

# análogamente podemos calcular S y R usando:
> S <- cov(x)
> R <- cor(x)
```

En la línea de comandos de R podemos escribir `xbar`, `R`, `b1` y `b2` para obtener, el vector de medias, la matriz de correlación y el coeficiente de sesgo y curtosis muestrales, dados por:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 5.8433 \\ 3.0573 \\ 3.7580 \\ 1.1993 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1.0000 & -0.1176 & 0.8718 & 0.8179 \\ -0.1176 & 1.0000 & -0.4284 & -0.3661 \\ 0.8718 & -0.4284 & 1.0000 & 0.9629 \\ 0.8179 & -0.3661 & 0.9629 & 1.0000 \end{pmatrix},$$

mientras que  $b_{1p} = 2.6972$  y  $b_{2p} = 23.7397$ , respectivamente.

## 2.4. Regresión lineal simple

Ahora estamos enfocados en situaciones tales que la variable  $x$  permite predecir o explicar la respuesta  $y$ . En regresión lineal tenemos el modelo,

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.19)$$

El objetivo es, basado en el conjunto de datos pareados,  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  determinar  $\alpha$  y  $\beta$  tal que produzcan el mejor ajuste. Utilizaremos el *método de mínimos cuadrados ordinarios* (OLS) definido como:

$$\min_{\theta} S(\theta),$$

con  $\theta = (\alpha, \beta)^\top$  y

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2.$$

OBSERVACIÓN 2.50. OLS minimiza las distancias *verticales* a la recta de regresión. Es decir, esto refleja que los  $x_i$ 's están *fijos* (o bien que se asumen conocidos).<sup>5</sup>

La función  $S(\theta)$  también es conocida como suma de cuadrados de los errores. De este modo, debemos determinar  $\theta = (\alpha, \beta)^\top$ , mediante resolver las condiciones de primer orden,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\theta)}{\partial \alpha} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i) = 0, \\ \frac{\partial S(\theta)}{\partial \beta} &= -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \alpha - \beta x_i) = 0, \end{aligned}$$

esto lleva a las *ecuaciones normales*:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i) &= \sum_{i=1}^n y_i - n\hat{\alpha} - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i) &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n x_i - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por  $n^{-1}$  y resolviendo para  $\hat{\alpha}$ , obtenemos

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}.$$

<sup>5</sup>Una alternativa es usar mínimos cuadrados totales o modelos con errores en las variables.

Substituyendo  $\hat{\alpha}$  en la segunda ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i y_i - (\bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}) \sum_{i=1}^n x_i - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} + \hat{\beta}n\bar{x}^2 - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} - \hat{\beta} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= 0.\end{aligned}$$

Lo que lleva a

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\text{var}(\mathbf{x})}.$$

De este modo, la *recta de regresión* asume la forma:

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

y llamamos a  $\hat{y}_i$  el valor “predicho” o “ajuste” para  $x_i$ . Se define

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

como el  $i$ -ésimo *residuo*, mientras que una medida de variabilidad es dada por:

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n e_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2 = \frac{1}{n-2} S(\hat{\boldsymbol{\theta}}),$$

con  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})^\top$ . Debemos resaltar que, el promedio de los valores predichos  $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n$ , asume la forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \bar{x} \\ &= (\bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}) + \hat{\beta} \bar{x} = \bar{y}.\end{aligned}$$

Haciendo  $R = \text{cor}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , sigue que

$$\hat{y}_i - \bar{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i - \bar{y} = \hat{\beta} (x_i - \bar{x}) = R \frac{s_y}{s_x} (x_i - \bar{x}),$$

es decir,

$$(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = R^2 \frac{s_y^2}{s_x^2} (x_i - \bar{x})^2.$$

Lo que nos lleva a escribir,

$$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = R^2 \frac{s_y^2}{s_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = R^2 \frac{s_y^2}{s_x^2} s_x^2 = R^2 s_y^2 = R^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2.$$

A partir de esta ecuación, sigue que

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{s_{\text{AJUSTE}}^2}{s_{\text{DATOS}}^2},$$

que se denomina *coeficiente de determinación*. Usando además que

$$y_i - \bar{y} = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y}),$$

podemos mostrar que

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2,$$

es decir,

$$s_{\text{DATOS}}^2 = s_{\text{RESIDUOS}}^2 + s_{\text{AJUSTE}}^2.$$

Como  $s_{\text{RESIDUOS}}^2 = S(\hat{\theta})$ , tenemos que  $s_{\text{AJUSTE}}^2 = R^2 s_{\text{DATOS}}^2$ . Luego, sigue que:

$$s_{\text{RESIDUOS}}^2 = (1 - R^2) s_{\text{DATOS}}^2.$$

Esto permite interpretar  $R^2$  como la proporción de varianza de los datos que puede ser explicada por el ajuste. En efecto,  $0 \leq R^2 \leq 1$  permite medir la calidad (o bondad) del ajuste.

**EJEMPLO 2.51.** Debemos ser precavidos al llevar un análisis de regresión y confiar de medidas tales como el  $R^2$  para evaluar la calidad del ajuste. Para notar este tipo de situaciones, considere los datos introducidos por [Anscombe \(1973\)](#). Este corresponde a cuatro conjunto de datos con 11 observaciones que aunque son bastante diferentes tienen estadísticas de resumen idénticas (promedio, varianza, correlación, coeficientes de regresión, etc.). En efecto, considere la siguiente figura

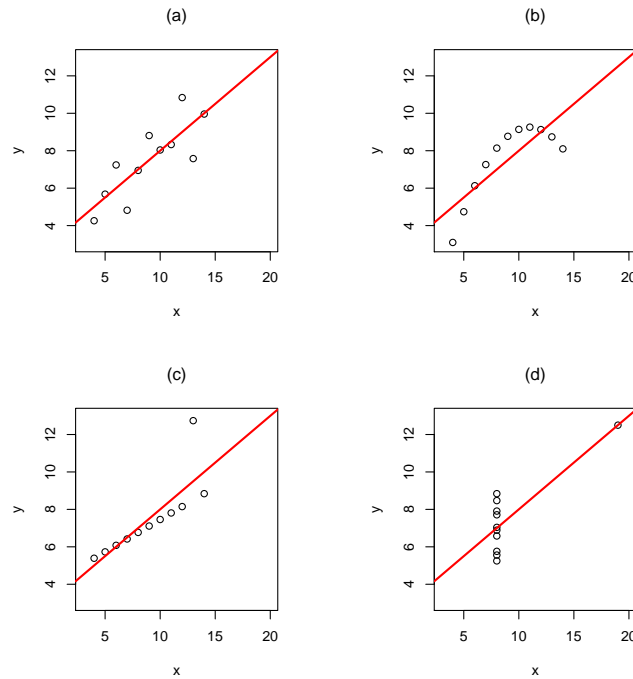


Figura 4. Cuarteto de regresiones idénticas de [Anscombe \(1973\)](#).

Por ejemplo, en la Figura 4(b), los datos presentan una tendencia cuadrática, mientras que en los Paneles (c) y (d) se aprecia el efecto de observaciones atípicas sobre la recta de regresión. Más aún, eliminando la observación extrema en el conjunto de datos en la Figura 4(d), la regresión deja de tener sentido. Para obtener los resultados del ajuste mediante regresión por mínimos cuadrados podemos considerar los siguientes comandos de R

```
# datos de Anscombe
> anscombe
  x1 x2 x3 x4   y1   y2   y3   y4
1  10 10 10  8  8.04 9.14  7.46  6.58
2   8  8  8  8  6.95 8.14  6.77  5.76
3  13 13 13  8  7.58 8.74 12.74  7.71
...
10  7  7  7  8  4.82 7.26  6.42  7.91
11  5  5  5  8  5.68 4.74  5.73  6.89

# Ajuste mediante OLS (para cada uno de los modelos)
> fm1 <- lm(y1 ~ x1, data = anscombe)
> fm2 <- lm(y2 ~ x2, data = anscombe)
> fm3 <- lm(y3 ~ x3, data = anscombe)
> fm4 <- lm(y4 ~ x4, data = anscombe)

# Figura 4.a (otros paneles son análogos)
> par(pty = "s")
> plot(y1 ~ x1, data = anscombe, xlim = c(4,20),
+      ylim = c(3,13), xlab = "x", ylab = "y")
> abline(coef(fm1), col = "red", lwd = 2) # línea en rojo

# Salida de resultados:
> summary(fm1)
Call:
lm(formula = y1 ~ x1, data = anscombe)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.92127 -0.45577 -0.04136  0.70941  1.83882

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   3.0001     1.1247   2.667  0.02573 *
x1             0.5001     0.1179   4.241  0.00217 **

Residual standard error: 1.237 on 9 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.6665, Adjusted R-squared: 0.6295
F-statistic: 17.99 on 1 and 9 DF, p-value: 0.00217

# Almacena coeficientes, residuos y valores predichos
> cf <- coef(fm1)
> res <- resid(fm1)
> fit <- fitted(lm1)
```

```
# Figura 5.a (otros paneles son análogos)
> par(pty = "s")
> plot(fit, res, xlab="Valores predichos", ylab="Residuos")
> abline(h = 0, lty = 2, col = "gray", lwd = 2) # línea gris
```

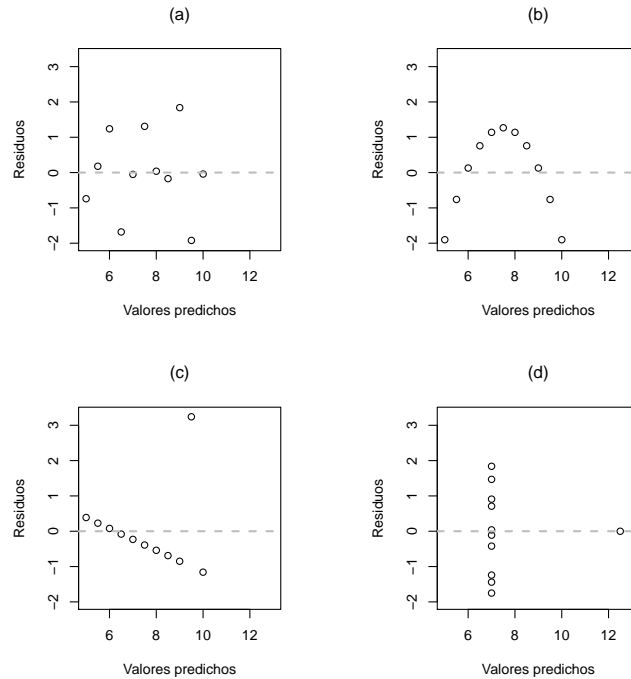


Figura 5. Gráfico de residuos para el cuarteto de regresiones idénticas de [Anscombe \(1973\)](#).

Para el modelo en Ecuación (2.19), es posible mostrar que:

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0, \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n e_i \hat{y}_i = 0.$$

De este modo, el gráfico de dispersión de residuos contra valores predichos dado en la Figura 5 no debería presentar algún tipo de comportamiento sistemático. Es decir, el único conjunto de datos donde el modelo de regresión lineal parece razonable es el desplegado en el Panel (a) de la Figura 4. En efecto, el gráfico de residuos en la Figura 5 (a) es el único que no presenta algún tipo de tendencia. En cambio, se debe incluir un término cuadrático al modelo de la Figura 4 (b). Mientras que el rol de las observaciones atípicas visibles en los Paneles (c) y (d) de la Figura 4 se aprecia claramente en los gráficos de residuos. Es decir, corresponden a un outlier (observación alejada en la ‘respuesta’) y un leverage (observación alejada en los ‘regresores’), respectivamente.

Debemos destacar que para este ejemplo sencillo es bastante fácil determinar que el modelo lineal no es apropiado para las configuraciones de datos en los Paneles (b), (c) y (d) presentados en la Figura 4. En general, no resulta fácil identificar situaciones donde se aprecie que el modelo propuesto está mal ajustado. Este tipo de situaciones es más difícil de determinar conforme se tiene de un mayor volumen de datos, o bien la cantidad de regresores aumenta.<sup>6</sup>

### 2.5. Resúmenes gráficos

Para introducir ideas consideremos una imagen digital de tamaño  $r \times c$ . Una imagen digital es un arreglo de tamaño  $r \times c$  que puede ser conceptualizada como una matriz de datos  $\mathbf{X} = (X_{ij})$ , para  $i = 1, \dots, r$ ,  $j = 1, \dots, c$ , donde el valor de la variable  $X$  en la posición  $(i, j)$  corresponde a un valor en una escala de grises en el intervalo  $[0, 1]$  tal que 0 representa el color negro y 1 representa el blanco. De este modo,  $\{X_{ij} : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq c\}$  representa el conjunto de intensidades de gris en cada una de las  $r \times c$  posiciones en el espacio bidimensional. Cada posición  $(i, j)$  es denominada un *pixel* (picture element). La Figura 6 presenta una imagen muy popular en ingeniería, específicamente en el área de tratamiento de imágenes, llamada frecuentemente *Lenna* y fue popularizada hace varias décadas atrás.<sup>7</sup>



Figura 6. Imagen *Lenna* de tamaño  $512 \times 512$ .

Podemos considerar una imagen como un vector  $\mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{X})$  en el que hemos concatenado las columnas de  $\mathbf{X}$ . Para la imagen *Lenna* tenemos  $n = 512 \times 512 = 262\,144$  observaciones. Un resumen para el conjunto de datos *Lenna* es obtenido usando los siguientes comandos en R:

```
# carga datos de 'Lenna' desde URL
> lena <- "http://fosorios.mat.utfsm.cl/files/data/lenna.png"
> download.file(lena, z, mode = "wb")
```

<sup>6</sup>En la asignatura *Análisis de Regresión* se revisará el aspecto de la crítica del modelo con mayor profundidad.

<sup>7</sup>Para más detalles sobre esta imagen, consultar la página web: <http://www.lenna.org/>



```

> library(png) # biblioteca para cargar imágenes PNG
> lena <- readPNG(z)[, ,1] # sólo el 1er canal es necesario

# carga biblioteca 'SpatialPack'
> library(SpatialPack)
> lena <- normalize(lena)
> plot(as.raster(lena)) # Figura 6

# convierte en un vector de datos
> x <- as.vector(lena)
> summary(x)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.0000  0.2712  0.4443  0.4316  0.5809  1.0000

# cuantiles más utilizados
> qx <- quantile(x)
> qx
   0%      25%      50%      75%     100%
0.0000000 0.2712455 0.4442928 0.5808888 1.0000000

> qx <- as.vector(qx)[-c(1,5)] # remueve extremos
> IQR <- qx[3] - qx[1]
> IQR # rango intercuartílico
[1] 0.3096433

```

Podemos notar que, debido a la normalización de los datos, el valor mínimo y máximo corresponden a 0 y 1, respectivamente, mientras que el rango intercuartílico, esto es, la distancia en la que se concentra el 50% central de la muestra resulta  $IQR = Q_3 - Q_1 = 0.5808 - 0.2712 = 0.3096$ .

A continuación se presenta dos herramientas gráficas para una muestra  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que permiten visualizar de forma simple la distribución de una variable de interés  $X$ , conocidas como *histograma* y *boxplot* (o diagrama de cajón-con-bigotes).

**2.5.1. Histograma.** Un histograma es una aproximación a la densidad desconocida construido a partir de los datos observados. Considere la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.52. Sea  $x_1, x_2, \dots, x_n$  una muestra de  $n$  observaciones y suponga que los datos son subdivididos en  $k$  intervalos, digamos  $I_1, I_2, \dots, I_k$ . Entonces, la frecuencia absoluta de la clase  $I_j$  es la cantidad de observaciones  $n_j$  de la muestra, que pertenecen al intervalo  $I_j$ . Evidentemente tenemos que:

$$n_j \geq 0, \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^k n_j = n.$$

La frecuencia relativa asociada a la clase  $I_j$  se define como:

$$f_j = \frac{n_j}{n}, \quad j = 1, \dots, k.$$

En este caso es fácil ver que  $f_j \geq 0$  y  $\sum_{j=1}^k f_j = 1$ . De este modo, un *histograma* es un gráfico de  $f_j$  (o  $n_j$ ) versus  $I_j$ .

Un histograma es un diagrama de frecuencias y resume la cantidad de observaciones por unidad de longitud. Luego, este diagrama permite visualizar la distribución de la variable de interés, tal como se presenta en la Figura 7. En este caso, ambos

histogramas tienen 14 clases. Este corresponde a un parámetro gráfico que puede modificarse para adaptarse a la estructura de la muestra que se tiene disponible. En algunos casos se grafica  $f_j/h$  versus  $I_j$ , donde  $h$  es la amplitud de los intervalos  $I_j$ . Este gráfico tiene la particularidad de que el área bajo la curva es dada por

$$A = \sum_{j=1}^k A_j = \sum_{j=1}^k (f_j/h) \cdot h = \sum_{j=1}^k f_j = 1.$$

En efecto, resultará claro más adelante que esta propiedad está asociada al concepto de probabilidad.

Debemos enfatizar que un histograma es una herramienta descriptiva. Más adelante estudiaremos algunas curvas llamadas *funciones de densidad de probabilidad* asociada a ciertas variables de interés. Sin embargo, histogramas han sido criticados por tener algunas inconvenientes notables. Además de la necesidad de escoger el número de intervalos  $k$  (o equivalentemente la amplitud de los intervalos  $h$ ), frecuentemente pueden resultar engañosos si se interpretan en exceso.

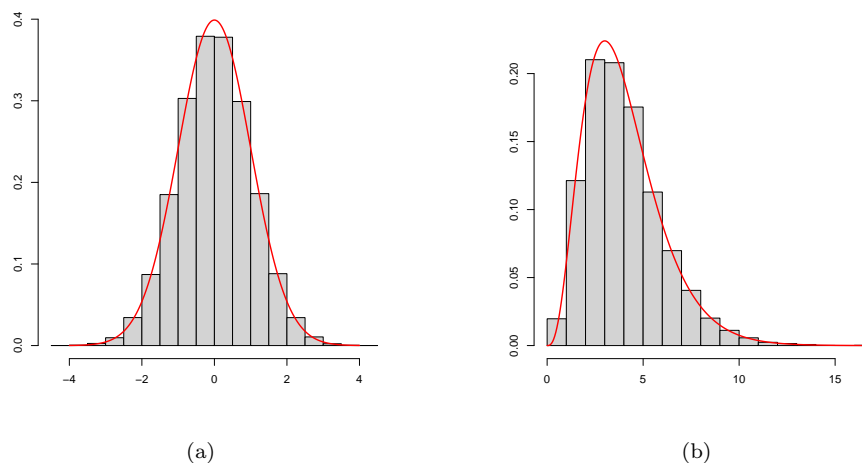


Figura 7. Histograma y densidad teórica para una muestra de 10 000 observaciones provenientes desde una distribución (a) normal y (b) gama.

**2.5.2. Boxplot (Diagrama de cajón con bigotes).** Este tipo de diagrama corresponde a un tipo diferente de visualización que nos permite explorar la ubicación, la escala, la asimetría y las colas de una densidad así como la presencia de observaciones atípicas (outliers). En contraste con el histograma el boxplot ofrece una descripción mucho más gruesa de la estructura de la muestra y no requiere la especificación de parámetros para la calibración del gráfico. Esta representación usualmente se realiza en forma de una caja, lo que explica el nombre del gráfico. A continuación se presenta el procedimiento para su construcción.

DEFINICIÓN 2.53. Considere  $x_1, x_2, \dots, x_n$  una muestra de  $n$  observaciones y sea:

- $Q_1$ ,  $me$  y  $Q_3$  respectivamente, el primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .
- Cálculo de los “bigotes”  $W_1$  y  $W_2$ , como:

$$W_1 = \min_{1 \leq j \leq n} \{x_j : x_j \geq Q_1 - 1.5IQR\}$$

$$W_2 = \max_{1 \leq j \leq n} \{x_j : x_j \leq Q_3 + 1.5IQR\}$$

- $O = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : x_i \notin [W_1, W_2]\}$ .

De este modo, el *boxplot* de  $x_1, \dots, x_n$  es el registro de  $W_1, Q_1, me, Q_3, W_2$  y  $\{x_j : j \in O\}$  sobre la recta real.

Aunque la definición puede ser un tanto difícil de visualizar, los gráficos en la Figura 8 permiten comprender la idea. La línea central corresponde a la mediana, mientras que los extremos del cajón representan  $Q_1$  y  $Q_3$ . Note que  $W_1$  y  $W_2$  representan los extremos del bigote y las observaciones atípicas son indicados por puntos. En el Panel (a) tenemos una distribución simétrica en torno de cero, mientras que la distribución en el Panel (b) presenta asimetría positiva.

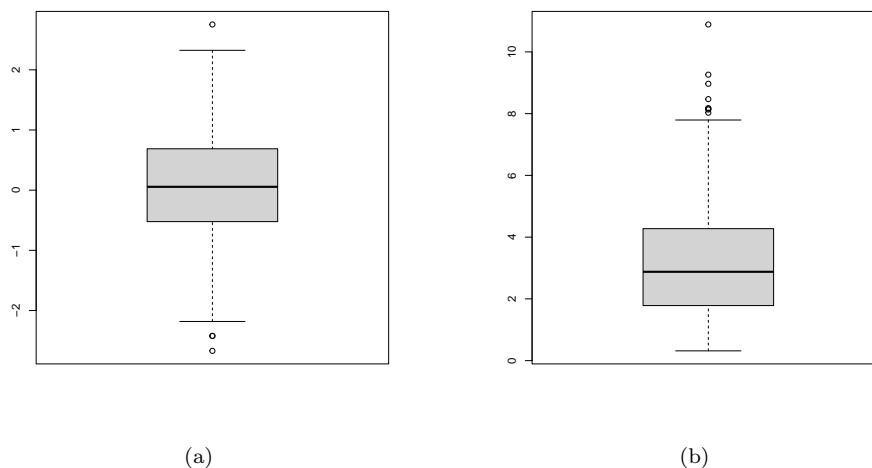


Figura 8. Boxplot para una muestra de 300 observaciones provenientes desde una distribución (a) normal y (b) gama.

Un aspecto destacable del boxplot, es que permite la comparación de varias muestras permitiendo la visualización simultánea de medidas de tendencia central y dispersión mediante construir una secuencia de gráficos de cajón-con-bigotes.

Retomando el conjunto de datos de la imagen Lenna, el siguiente código en R, permite obtener el histograma, la curva de densidad estimada y el boxplot:

```
# histograma y densidad estimada (Fig. 9)
> hist(x, freq = FALSE, main = "", xlab = "Lenna",
+      ylab = "Densidad")
```

```

> plot(density(x), main = "", xlab = "bandwith = 0.0161",
+      ylab = "Densidad")
> boxplot(x)
> xbar <- mean(x) # promedio
> abline(h = xbar, lty =2, col = "red") # línea segmentada

```

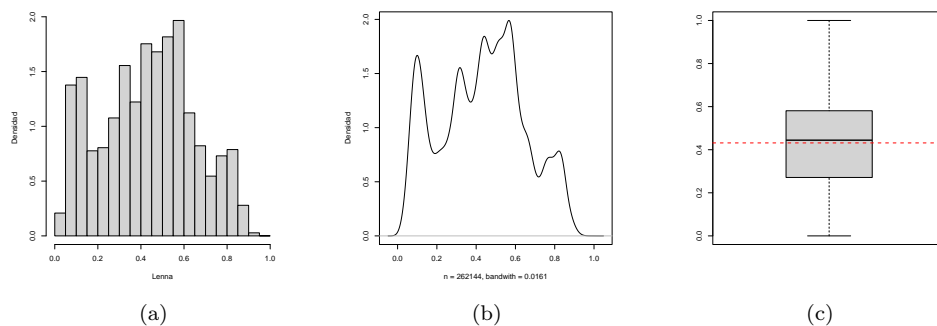


Figura 9. Histograma, densidad estimada y boxplot para los datos de la imagen Lenna.

Es interesante destacar que imágenes en color se suelen representar como un arreglo con tres canales, usualmente rojo (R), verde (G) y azul (B), lo que son combinados de manera apropiada para producir una representación a color. Considere la imagen Lenna en formato a color,



Figura 10. Imagen Lenna en versión a color.

De este modo, podemos considerar que las intensidades de rojo, verde y azul, representan 3 conjuntos de datos. Con fines comparativos, Figuras 11 y 12 presentan histogramas y boxplots para cada uno de los canales RGB de la imagen Lenna.

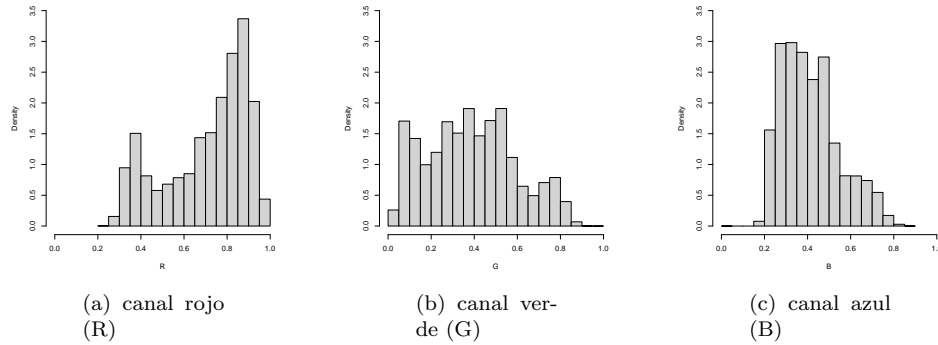


Figura 11. Histogramas para cada uno de los canales RGB de los datos de la imagen Lenna.

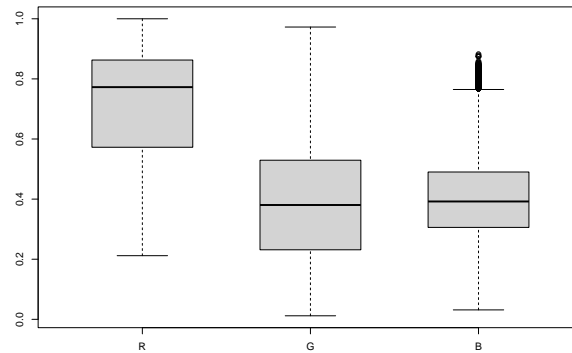


Figura 12. Boxplots para cada uno de los canales RGB de los datos de la imagen Lenna.

Es notable como los boxplots en la Figura 12 nos permite hacer una comparación rápida de la configuración de cada uno de los canales RGB.

El campo de visualización es tópico amplio con desafíos muy relevantes dado la demanda por resumir grandes volúmenes de información usando un despliegue gráfico. Para mayores detalles sobre visualización así como por técnicas de análisis exploratorio consultar [Tukey \(1977\)](#), [Cleveland \(1993\)](#) y [Wilkinson \(1999\)](#).



## Bibliografía

- Anscombe, F.J. (1973) Graphs in statistical analysis. *The American Statistician* **27**, 17-21.
- Barlow, J.L. (1993). Numerical aspects of solving linear least squares problems. En: *Handbook of Statistics, Vol. 9*, C.R. Rao (Ed.). Elsevier, pp. 303-373.
- Bolfarine, H., Sandoval, M.C. (2001). *Introdução à Inferência Estatística*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.
- Casella, G., Berger, R.L. (2002). *Statistical Inference (2nd Ed.)*. Duxbury, Pacific Grove.
- Chan, T.F., Lewis, J.G. (1979). Computing standard deviations: Accuracy. *Communications of the Association for Computing Machinery* **22**, 526-531.
- Chan, T.F., Golub, G.H., LeVeque, R.J. (1983). Algorithms for computing the sample variance: Analysis and recommendations. *The American Statistician* **37**, 242-247.
- Charalambides, C.A. (2002). *Enumerative Combinatorics* Chapman & Hall, Boca Raton.
- Chung, K.L. (1974). *A Course in Probability Theory (2nd Ed.)*. Academic Press, New York.
- Clarke, M.R.B. (1971). Algorithm AS 41: Updating the sample mean and dispersion matrix. *Applied Statistics* **20**, 206-209.
- Cleveland, W.S. (1993). *Visualizing Data*. Hobart Press, New Jersey.
- Frery, A.C., Cribari-Neto, F. (2005). *Elementos de Estatística Computacional Usando Plataformas de Software Livre/Gratuito*. IMPA, Rio de Janeiro.
- Fisher, R.A. (1936). The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Annals of Eugenics* **7**, 179-188.
- Galbiati, J. (2012). *Tablas de Probabilidad (8a Ed.)*. Instituto de Estadística, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
- Graillat, S. (2009). Accurate floating-point product and exponentiation. *IEEE Transactions on Computers* **58**, 994-1000.
- Grossman, S.I., Turner, J.E. (1974). *Mathematics for the Biological Sciences*. MacMillan Publishing, New York.
- Hoel, P.G., Port, S.C., Stone, C.J. (1971). *Introduction to Probability Theory* Houghton Mifflin Company, Boston.
- Jambu, M. (1991). *Exploratory and Multivariate Data Analysis*. Academic Press, Boston.
- Keeling, K.B., Pavur, R.J. (2007). A comparative study of the reliability of nine statistical software packages. *Computational Statistics & Data Analysis* **51**, 3811-3831.
- Knuth, D.E. (1997). *The Art of Computer Programming: Vol. 1, Fundamental Algorithms*. Addison-Wesley, Massachusetts.

- Mardia, K.V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika* **57**, 519-530.
- Mardia, K.V. (1974). Application of some measures of multivariate skewness and kurtosis in testing normality and robustness studies. *Sankhyā, Series B* **36**, 115-128.
- McCullough, B.D., Wilson, B. (1999). On the accuracy of statistical procedures in Microsoft Excel 97. *Computational Statistics & Data Analysis* **31**, 27-37.
- McCullough, B.D., Wilson, B. (2002). On the accuracy of statistical procedures in Microsoft Excel 2000 and Excel XP. *Computational Statistics & Data Analysis* **40**, 713-721.
- McCullough, B.D., Wilson, B. (2005). On the accuracy of statistical procedures in Microsoft Excel 2003. *Computational Statistics & Data Analysis* **49**, 1244-1252.
- Mood, A.M., Graybill, F.A., Boes, D.C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics (3rd Ed.)*. McGraw-Hill, New York.
- Osorio, F., Ogueda, A. (2022). *fastmatrix*: Fast computation of some matrices useful in statistics. R package version 0.4. URL: [faosorios.github.io/fastmatrix/](https://faosorios.github.io/fastmatrix/)
- Panaretos, V.M. (2016). *Statistics for Mathematicians: A Rigorous First Course*. Birkhäuser, Laussane.
- Pébay, P., Terriberry, T.B., Kolla, H., Bennett, J. (2016). Numerically stable, scalable formulas for parallel and online computation of higher order multivariate central moments with arbitrary weights. *Computational Statistics* **31**, 1305-1325.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P. (1992). *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge.
- R Core Team (2023). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL: [www.R-project.org](https://www.R-project.org)
- Spicer, C.C. (1972). Algorithm AS 52: Calculation of power sums of deviations about the mean. *Applied Statistics* **21**, 226-227.
- Thisted, R.A. (1988). *Elements of Statistical Computing*. Chapman & Hall, Boca Raton.
- Tukey, J.W. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Addison-Wesley, Massachusetts.
- Venables, W.N., Ripley, B.D. (1994). *Modern Applied Statistics with S-Plus*. Springer, New York.
- Wasserman, L. (2004). *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference*. Springer, New York.
- Welford, B.P. (1962). Note on a method for calculating corrected sums of squares and products. *Technometrics* **4**, 419-420.
- West, D.H.D. (1979). Updating mean and variances estimates: An improved method. *Communications of the Association for Computing Machinery* **22**, 532-535.
- Wilkinson, L. (1999). *The Grammar of Graphics*. Springer, New York.